



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
Facultad de Tecnología de la Construcción

**MATRIZ DE RIGIDEZ DE EFECTOS HORIZONTALES
HIPÓTESIS DE DIAFRAGMA RÍGIDO.**

Trabajo Monográfico Elaborado por:

Br. Castro Rivera, Juan Paul
Br. López Sánchez, Elyin Jacfabel

Sometido a la:

FACULTAD DE TECNOLOGÍA DE LA CONSTRUCCIÓN

Como requisito para optar al título de:

Ingeniero Civil

Tutor:

Sampson Murguía, Juan Alberto

Managua, Nicaragua - 2013



RESUMEN

La presente monografía abarca los conceptos básicos para obtener la **matriz de rigidez de efectos horizontales** de un edificio, el cual, su sistema de piso se ha idealizado como diafragma rígido considerando los tres movimientos de cuerpo rígido principales ante cargas laterales: las dos traslaciones horizontales y el giro con respecto al eje vertical. Estas simplificaciones permiten analizar edificios complejos con un limitado número de grados de libertad, dado que la respuesta tridimensional del edificio se reduce mediante el **método de igualación de grados de libertad** y el **método de condensación estática**, al cálculo de un sistema matricial de orden **3N** donde **N** es el número de niveles de la estructura.

Definiendo la matriz de rigidez de efectos horizontales de los diferentes sistemas que componen la estructura, se ensambla la matriz de rigidez de toda la estructura bajo la hipótesis de comportamiento de diafragma rígido al relacionar los desplazamientos laterales de cada sistema en cada nivel con los tres movimientos de cuerpo rígido que se desarrollan en ese nivel.



Índice

CONTENIDO GENERAL

Resumen del tema	II
Índice	III

Introducción	1
Objetivos	2
Antecedentes	4
Justificación	5

CAPÍTULO I CONCEPTOS BÁSICOS

1.1 Introducción	6
1.2 Argumento del análisis lineal elástico de estructuras	7
1.2.1 Mecánica Computacional	7
1.2.2 Mecánica de medios continuos	7
1.2.3 Mecánica continua de sólidos deformables	8
1.2.4 Estática	8
1.2.5 Análisis lineal	9
1.2.6 Método de análisis	10
1.3 Idealización estructural	10
1.3.1 Estructura reticular	12
1.3.2 Idealización de un pórtico plano	12
1.4 Discretización estructural	13
1.4.1 Sistemas de coordenadas	14
1.4.2 Grados de libertad	14
1.4.3 Elemento Viga	15
1.4.4 Elemento Columna	15
1.4.5 Nodo teórico	15
1.4.6 Discretización paso a paso para un pórtico plano	16



CAPÍTULO II

MÉTODO MATRICIAL DE RIGIDEZ PARA PÓRTICOS PLANOS

2.1 Introducción	18
2.1.1 Modelo matemático	19
2.1.2 Método matricial de la rigidez	20
2.2 Sistemas de coordenadas y su transformación	21
2.3 Matriz de rigidez de un elemento de pórtico plano	23
2.4 Principio de contragradiente	36
2.5 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales	37
2.5.1 Matriz de rigidez del elemento viga	39
2.5.2 Matriz de rigidez del elemento columna	40
2.6 Ensamble de la matriz de rigidez	41
2.6.1 Estructuración	41
2.6.2 Vinculación	42
2.6.3 Concatenación	45
Ejemplo 2.1	47

CAPÍTULO III

MATRIZ DE RIGIDEZ DE EFECTOS HORIZONTALES DE PÓRTICOS PLANOS

3.1 Introducción	54
3.2 Igualación de grados de libertad	54
3.2.1 Deformaciones axiales en las columnas	56
3.2.2 Deformaciones axiales en las vigas	56
3.3 Condensación de grados de libertad	64
3.4 Matriz de rigidez de efectos horizontales de un pórtico plano	67
Ejemplo 3.1	67



CAPÍTULO IV

IDEALIZACIÓN DE DIAFRAGMA RÍGIDO

4.1 Introducción	74
4.2 Hipótesis de diafragma rígido en un sistema de piso	74
4.3 Transformación de los grados de libertad	76
4.4 Ensamble de la matriz de rigidez de toda la estructura	79

CAPITULO V

EJEMPLO

5.1 Descripción del edificio en análisis	80
5.2 Estructuración	82
5.3 Vinculación	82
5.4 Concatenación	84
5.5 Matriz de rigidez de efectos horizontales de los pórticos	85
5.6 Transformación de coordenadas	88
5.7 Matriz de rigidez de efectos horizontales del edificio	92
5.8 Centro de rigidez de la estructura	93
5.9 Desplazamientos del centro de masa	94
5.10 Esfuerzos en los elementos	95

Conclusiones	94
Recomendaciones	95
Bibliografía	96

Anexos	
Anexo A.1	-1-
Anexo A.2	-4-
Anexo A.3	-5-
Anexo A.4	-5-



INTRODUCCIÓN

La estructura de un edificio es la parte responsable de mantener la forma de éste bajo la influencia de las fuerzas, cargas y factores ambientales a los cuales está sujeto. Es importante que la estructura como un todo (o una parte de ella) no colapse ó se deforme a niveles inaceptables cuando está sujeta a fuerzas, cargas y combinaciones de las mismas.

Para conocer los valores de deformación, un método muy práctico en el análisis estructural es el **Método Matricial de la Rigidez**; el cual trabaja con desplazamientos desconocidos como incógnitas, por lo tanto, provee una herramienta muy poderosa a la hora de analizar edificios ante fuerzas horizontales.

Para el análisis de edificios ante fuerzas horizontales de manera tridimensional se hace necesario introducir los siguientes conceptos:

1. Método matricial de la rigidez
2. Método de igualación de grados de libertad
3. Método de condensación estática
4. Idealización de diafragma rígido a la losa de entrepiso



OBJETIVOS

2.1 OBJETIVOS GENERALES

2.1.1 Objetivo general de la monografía

- ❖ Derivar la MATRIZ DE RIGIDEZ DE EFECTOS HORIZONTALES a partir de la matriz de rigidez de pórticos planos

2.1.2 Objetivos generales de cada capítulo

Capítulo 1:

- ❖ Introducir los conceptos básicos del análisis estructural

Capítulo 2:

- ❖ Explicar la metodología para ensamblar la matriz de rigidez de pórticos planos a través de submatrices de 3x3

Capítulo 3:

- ❖ Aplicar el método de igualación de grados de libertad y el método de condensación estática a la matriz de rigidez de pórtico plano

Capítulo 4:

- ❖ Incorporar la hipótesis de diafragma rígido al modelo matemático

Capítulo 5:

- ❖ Realizar el procedimiento de análisis para una estructura de tres niveles



2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

2.2.1 Objetivos específicos de cada capítulo

Capítulo 1:

- ❖ Idealizar pórticos reticulares planos
- ❖ Discretizar pórticos reticulares planos

Capítulo 2:

- ❖ Plantear la matriz de rigidez de un elemento de pórtico plano en coordenadas globales
- ❖ Encontrar la matriz de rigidez del elemento viga en coordenadas globales
- ❖ Encontrar la matriz de rigidez del elemento columna en coordenadas globales

Capítulo 3:

- ❖ Modelar matemáticamente la estructura limitándola al empleo de fuerzas horizontales

Capítulo 4:

- ❖ Relacionar los grados de libertad de pórticos reticulares planos con los grados de libertad que se desarrollan debido a la hipótesis de diafragma rígido

Capítulo 5:

- ❖ Encontrar los desplazamientos laterales de una estructura de tres niveles ante cargas laterales



ANTECEDENTES

El análisis matricial de estructuras no es nuevo a la ingeniería estructural, sus primeros desarrollos tuvieron lugar hace más de un siglo pero realmente su aplicación práctica ocurrió con la aparición del computador digital, a partir de finales de la década del 1950. Se puede afirmar que hoy en día prácticamente no se realiza un análisis estructural sin emplear el computador digital.

El concepto de diafragma rígido valido para estructuras de edificios, donde solo se consideran los tres movimientos de cuerpo rígido principales ante carga lateral: las dos traslaciones horizontales y el giro con respecto al eje vertical ha permitido por décadas analizar edificios complejos con un limitado número de grados de libertad, dado que la respuesta tridimensional del edificio se reduce al cálculo de un sistema matricial de orden $3N$, donde N es el número de pisos de la estructura.



JUSTIFICACIÓN

El análisis matricial provee las herramientas necesarias para analizar las estructuras de edificios de forma más refinada, compacta y sencilla; esto es, no solo empleando el concepto general del **Método Matricial de la Rigidez**; sino, incorporar hipótesis y métodos que permitan analizar edificios más acorde a la realidad.

Estas incorporaciones son:

- ❖ Hipótesis de diafragma rígido:
 - Analiza la estructura como un todo y no como sistemas independientes.

- ❖ Método de igualación de grados de libertad:
 - Crea un modelo matemático incapaz de sufrir deformaciones axiales por parte de sus elementos.

- ❖ Método de condensación estática:
 - Crea un modelo matemático limitado al empleo de fuerzas horizontales, esto significa que los grados de libertad se reducen drásticamente.

Una vez obtenida la **Matriz de Rigidez de Efectos Horizontales** de la estructura ésta desarrolla uno de los conceptos más importante en el análisis estructural:

Análisis ante Cargas Horizontales

CAPITULO I

CONCEPTOS BASICOS

1.1 INTRODUCCIÓN

Se define el **Análisis Estructural** como el área encargada de determinar el comportamiento de las estructuras cuando éstas están sometidas a diversas acciones de cargas durante su construcción y vida útil. Se entiende en este caso como comportamiento, a los estados de tensión y deformación que la estructura posee ante determinadas acciones de cargas. Dicho comportamiento queda directamente relacionado a una serie de parámetros, los cuales dependen de todas las consideraciones del análisis.

Representándolo con diagrama de block:

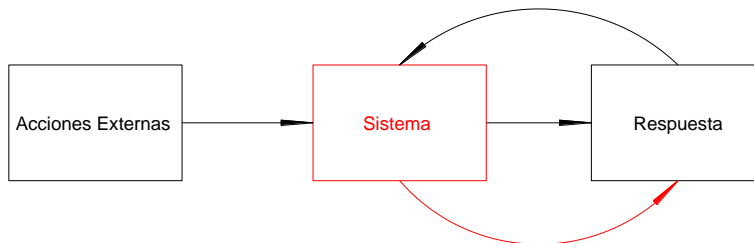


Figura 1.1 Esquema general de análisis

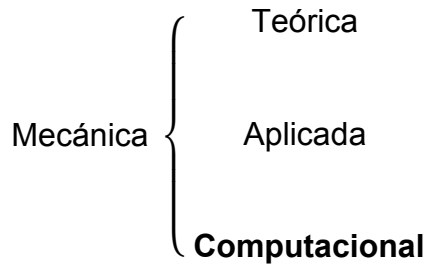
Ante determinadas acciones externas, la estructura responde en forma particular, esta respuesta consta de dos partes fundamentales:

- a. **Estados de tensión:** necesarios para los criterios de resistencia establecidos en el diseño.
- b. **Estados de deformación:** necesarios para establecer los criterios de rigidez y funcionalidad dinámicos.



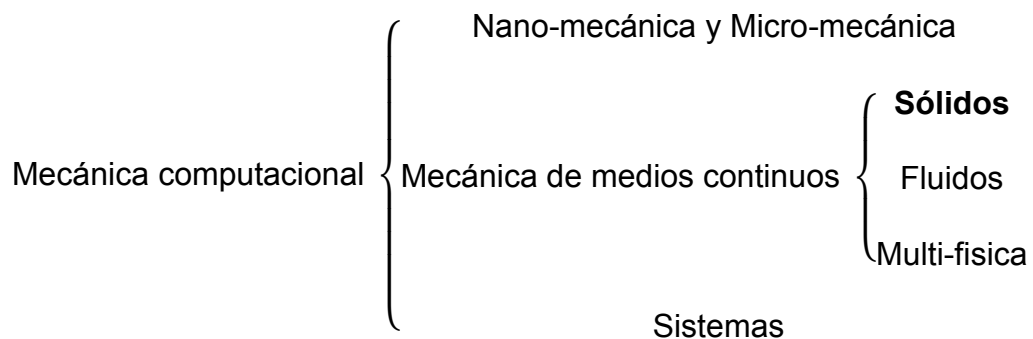
1.2 ARGUMENTO DEL ANÁLISIS LINEAL ELÁSTICO DE ESTRUCTURAS

El campo de la mecánica puede ser dividido en tres grandes áreas



1.2.1 MECÁNICA COMPUTACIONAL

En los últimos años la **Mecánica Teórica** y la **Mecánica Aplicada** han experimentado un gran desarrollo, principalmente debido al perfeccionamiento de las computadoras y a la disponibilidad de nuevos métodos de cálculo. Es así; como, en las naciones altamente desarrolladas, prácticamente todo producto final es el resultado directo o indirecto de alguna aplicación computacional de los principios de la mecánica. Esta nueva disciplina combina la mecánica teórica y la mecánica aplicada con los métodos numéricos y la informática. Internacionalmente se le denomina **Mecánica Computacional**. Que a su vez se divide en:



1.2.2 MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

Es la rama de la mecánica, la cual propone un modelo unificado de estudio para sólidos rígidos, sólidos deformables y fluidos. El término “Medio Continuo” se usa para asignar un modelo matemático a un material cuyo comportamiento se podría describir adecuadamente por este modelo de estudio.

1.2.3 MECÁNICA CONTINUA DE SÓLIDOS DEFORMABLES

Estudia el comportamiento de los cuerpos sólidos deformables ante diferentes tipos de situaciones como la aplicación de cargas y efectos térmicos.

La mecánica de sólidos deformables es estudiada a través de la **Resistencia de Materiales**, mediante modelos idealizados. La resistencia de un elemento se define como su capacidad para resistir esfuerzos y fuerzas aplicadas sin colapso del material, adquirir deformaciones permanentes o deteriorarse de algún modo.

Un modelo de resistencia de materiales establece una relación entre las fuerzas aplicadas, los esfuerzos y desplazamientos inducidos por ellas. Especialmente las simplificaciones geométricas y las restricciones impuestas sobre el modo de aplicación de las cargas hacen que el campo de deformaciones y tensiones sean sencillos de calcular.

El problema de la mecánica continua puede ser dividido de la siguiente manera:



1.2.4 ESTÁTICA

El problema básico de la estática a diferencia del **Análisis Dinámico** es que tiene una sola solución, debido a que las cargas aplicadas a la estructura no varían en el tiempo.

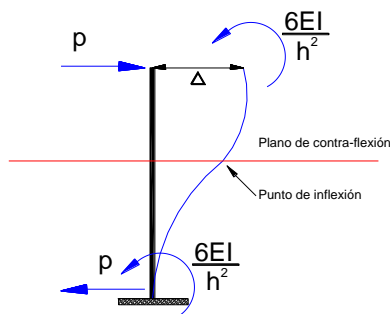


Figura 1.2 Solución única ante una carga estática

Una clasificación del problema estático relevante es:

Análisis estático { **Lineal - elástico**
No-Lineal

1.2.5 ANÁLISIS LINEAL

Para poder tratar el problema de la respuesta de la estructura es necesario conceptualizar las características físicas de los materiales. Por lo tanto se admite que dentro de ciertos límites, los cuerpos son perfectamente elásticos e isótropos, por lo cual conservan sus propiedades en todas las direcciones. Para esto los materiales cumplen con la **Ley de Robert Hooke**, la cual establece que el alargamiento unitario que experimenta un material elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada dentro de ciertos límites.

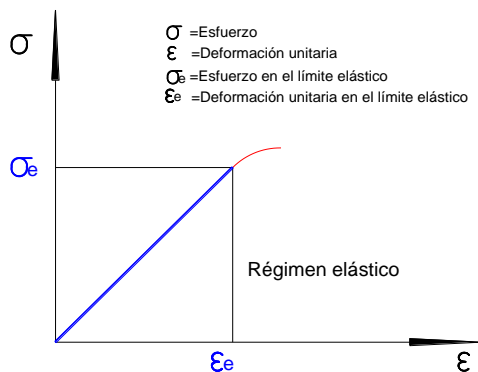


Figura: 1.3 Régimen elástico

Si se observa la figura 1.3, en un principio aparece una zona que sigue una distribución lineal, donde la pendiente es el módulo de elasticidad o módulo de **Robert Young E**. esta zona corresponde a las deformaciones elásticas del material hasta un punto donde la función cambia de régimen y empieza a curvarse, zona que corresponde al inicio del régimen plástico.

1.2.6 MÉTODO DE ANÁLISIS

A medida que un sistema estructural se hace relativamente complejo, la mayoría de los métodos se vuelven muy laboriosos y por lo tanto, aunque el enfoque es el mismo (cálculo de estado de tensiones y deformaciones), la sistematización de los cálculos y la percepción de lo que ellos significan son de vital importancia.

Al aceptar la hipótesis de comportamiento elástico-lineal, se puede considerar que los métodos matriciales son exactos para el análisis de estructuras.

1.3 IDEALIZACIÓN ESTRUCTURAL

La idealización es básicamente introducir suposiciones sobre el comportamiento de los elementos que componen a una determinada estructura, la forma en que están unidos entre si y la forma en que se sustentan.

Para que el análisis de una estructura sea correcto es necesario que su idealización se acerque lo más posible a su comportamiento real.

Entre los diversos criterios a tomar en cuenta están:

- Disposición espacial de la estructura: una, **dos o tres dimensiones**
- Comportamiento del material: **elástico** o inelástico
- Tipos de deformaciones: **lineal elástico** o plásticas
- Tipos de cargas actuantes: **estática** o dinámicas
- Tipos de elementos: **discretos**, continuos o mixtos
- Tipos de uniones estructurales entre los elementos: articulados, **rígidos** o flexibles.

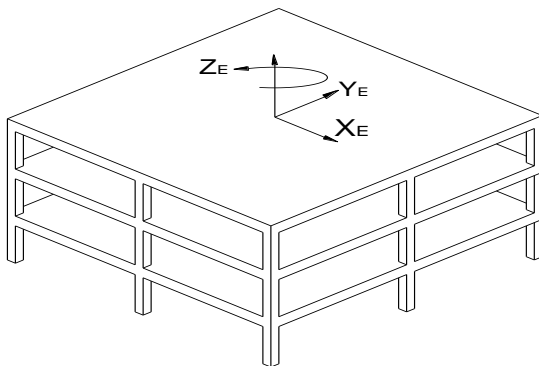


Figura 1.4 Estructura idealizada



Mediante la figura 1.4 se establecen dichos criterios:

Disposición espacial de la estructura: Según la figura 1.4 se observa que la estructura es tridimensional, compuesta por sistemas de pórticos en las dos direcciones horizontales principales, unidos por un diafragma de piso en cada nivel. Por lo tanto:

Se puede hacer el análisis en cada dirección para pórticos planos, como primer criterio.

Comportamiento del material, tipos de deformaciones, tipos de cargas actuantes: Como se ha discutido anteriormente, debido a que el análisis es elástico-lineal, el comportamiento del material es elástico e isótropo, con deformaciones pequeñas (linealidad geométrica) y los tipos de cargas actuantes sobre la estructura serán **Estáticas**.

Tipos de elementos y tipos de uniones: Al referirse a la figura 1.4 se puede idealizar la estructura a través de diagramas de líneas. Estas líneas representan el eje baricéntrico del elemento que se ha idealizado (elementos prismáticos rectilíneos). Por ejemplo la figura 1.5.

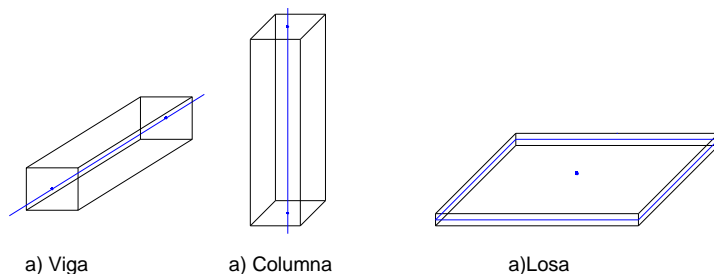


Figura: 1.5 Línea baricéntrica de un elemento idealizado.

1.3.1 ESTRUCTURA RETICULAR

Se llama estructura reticular a las que están formadas por elementos prismáticos rectilíneos unidos entre sí mediante nodos rígidos, los cuales forman alineaciones perpendiculares entre sí, con separaciones repetitivas. Los pórticos planos pueden ser estructuras reticulares cuando cumplen con la definición antes expuesta, en este caso sus elementos trabajan a flexión, cortante y axial.

Como ejemplo la figura 1.6

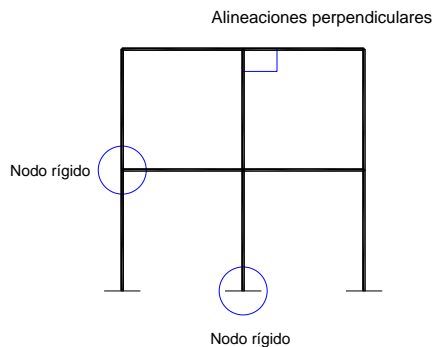


Figura 1.6 pórtico plano reticular

1.3.2 IDEALIZACIÓN DE UN PÓRTICO PLANO

Para el análisis de un pórtico es necesario hacer algunas simplificaciones a la estructura real. Un pórtico tiene no solo dimensiones longitudinales, sino transversales, como el ancho y la altura de la sección transversal y estos valores influyen en el análisis de la estructura y su respuesta estructural.

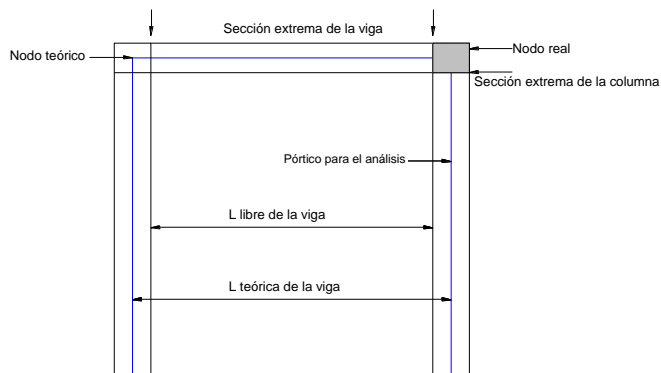


Figura 1.7 Consideraciones para un pórtico plano



Según se muestra en la figura 1.7, la estructura teórica para el análisis es la «línea azul» que corresponde a la línea del eje baricéntrico del elemento. Se debe distinguir claramente la diferencia entre la longitud real de la viga, la longitud libre y la longitud teórica, que usa en los modelos matemáticos empleados para el análisis de la estructura. Al hacer esta idealización, secciones diferentes en la estructura como son el extremo de la viga y el extremo de la columna se juntan en un punto: el nudo rígido teórico.

1.4 DISCRETIZACIÓN ESTRUCTURAL

En general, un sólido deformable real, como cualquier medio continuo es un sistema físico con un número infinito de grados de libertad, es decir, un sistema continuo. Así sucede que en general para describir la deformación de un sólido se necesita explicitar un campo vectorial de desplazamientos sobre cada uno de sus puntos. Este campo de desplazamientos en general no es reductible a un número finito de parámetros, y por tanto un sólido deformable de forma totalmente general no tiene un número finito de grados de libertad.

Sin embargo, para elementos prismáticos con longitud grande comparada con el área de su sección transversal, el campo de desplazamientos viene dado por la llamada curva elástica, cuya deformación siempre es reductible a un conjunto finito de parámetros. En concreto, fijados los desplazamientos y giros de las secciones extremas de una barra elástica, queda completamente determinada su forma. Así, para una estructura formada por barras largas elásticas, fijados los desplazamientos de los nudos, queda completamente determinada la forma deformada de dicha estructura. Esto hace que las estructuras de piezas prismáticas largas puedan ser tratadas muy aproximadamente mediante un número finito de grados de libertad y que puedan ser calculadas al resolver un número finito de ecuaciones algebraicas.

Una vez que la estructura ha sido idealizada esta debe ser discretizada, esta discretización es definida por cada **Nodo** y **Elemento**. Para esto será necesario introducir algunos conceptos, tales como:

1.4.1 SISTEMA DE COORDENADAS

Para el caso de pórticos planos se hará referencia a **Coordenadas Locales** cuando se trata de fuerzas y deformaciones referidas con respecto al eje propio del elemento (letras minúsculas) y **Coordenadas Globales** cuando se refiere a los ejes del pórtico como un conjunto (letras mayúsculas), además para el sistema tridimensional se hará referencia a **Coordenadas Globales de toda la Estructura** (sub-índice E en la figura 1.4). Todas las coordenadas son definidas positivas en las direcciones mostradas.



Figura 1.8 Sistemas de coordenadas

1.4.2 GRADOS DE LIBERTAD

Se llama grado de libertad a un desplazamiento independiente generalizado de un nodo.

Este desplazamiento debe de ser linealmente independiente y no estar relacionado con ningún otro. Se habla de desplazamientos generalizados, debido que en este término se incluyen traslaciones y rotaciones. Esto puede ser observado en la figura 1.9

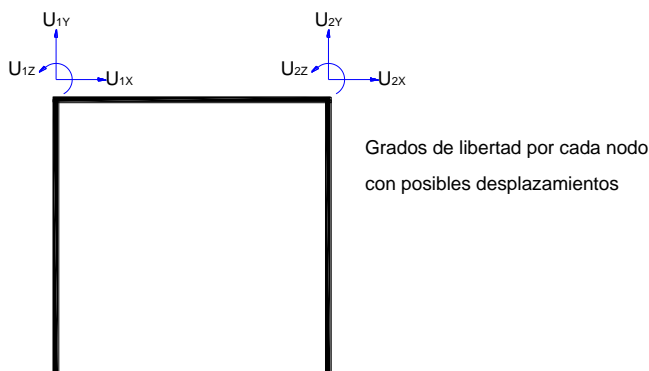


Figura 1.9 Grados de libertad para pórtico reticulares.

1.4.3 ELEMENTO VIGA

Son los elementos horizontales de un pórtico y trabajan esencialmente a flexión y cortante.

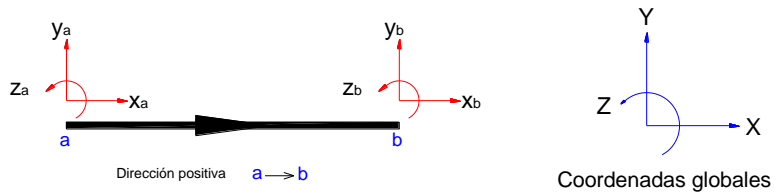


Figura 1.10 Elemento viga.

1.4.4 ELEMENTO COLUMNA

Son los elementos verticales de un pórtico y pueden trabajar a flexión, axial y cortante.

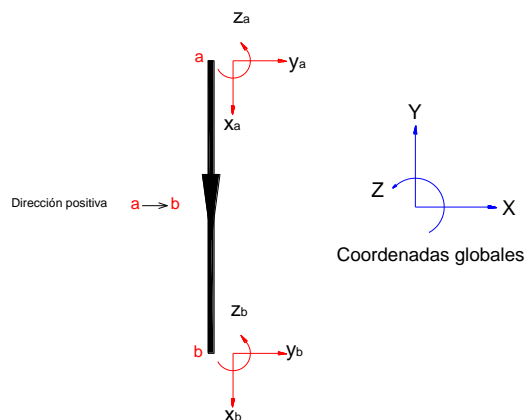


Figura 1.11 Elemento columna.

1.4.5 NODO TEÓRICO

Si se observa la figura 1.7 es el punto donde se une dos o más elementos de un pórtico sobre su eje baricentrico.

1.4.6 DISCRETIZACIÓN PASO A PASO PARA UN PÓRTICO PLANO

- **Número del nodo:** Se enumeraran de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo y el número del nodo estará encerrado por un círculo.

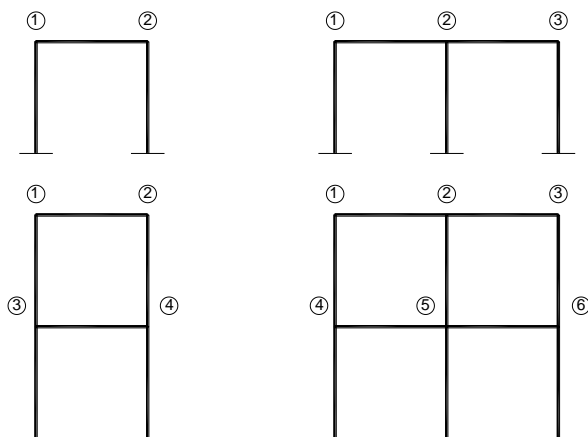


Figura 1.12 Numeración de los nodos.

- **Grados de libertad por nodo:** cada nodo tiene 3 grados de libertad (figura 1.9) de acuerdo a la definición de pórtico reticular expuesta anteriormente.
- **Número del elemento:** Se enumeraran primeramente los elementos vigas y posteriormente los elementos columnas, con la misma secuencia que para los nodos y el número estará encerrado por un rectángulo.

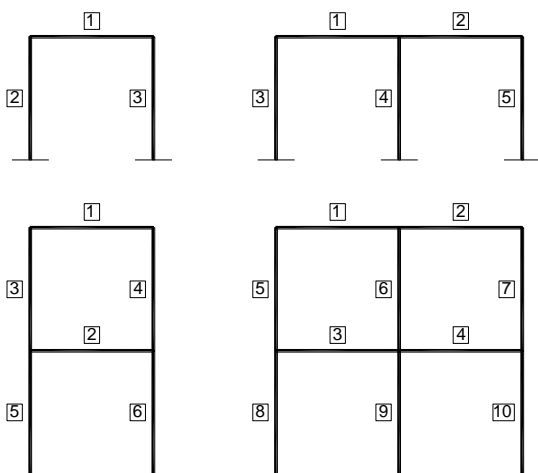


Figura 1.13 Numeración de los elementos.

- **Extremo inicial y extremo final del elemento:** Se denominara al extremo inicial del elemento con la letra **a** minúscula y al extremo final con la letra **b** minúscula.

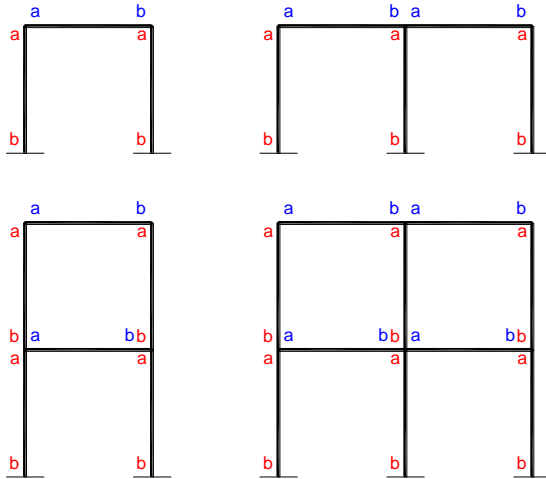


Figura 1.14 Extremo inicial y final de los elementos.

Por lo tanto, un pórtico discretizado queda de la siguiente manera:

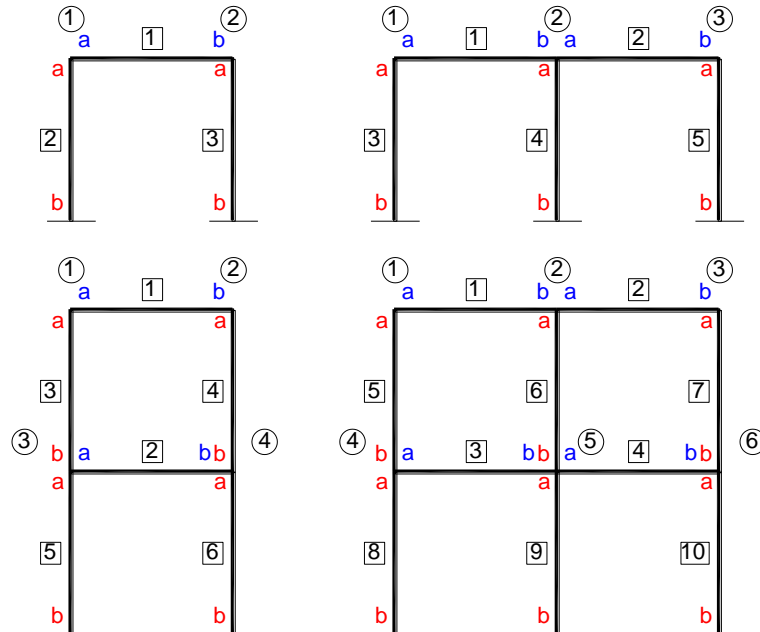


Figura 1.15 Discretización para pórticos planos.

CAPITULO II

MÉTODO MATRICIAL DE RIGIDEZ PARA PÓRTICOS PLANOS

2.1 INTRODUCCIÓN

La concepción de un modelo matemático, es uno de los tres aspectos principales de la respuesta estructural que se desea obtener, dos de estos aspectos pueden ser representadas en la figura 2.1.

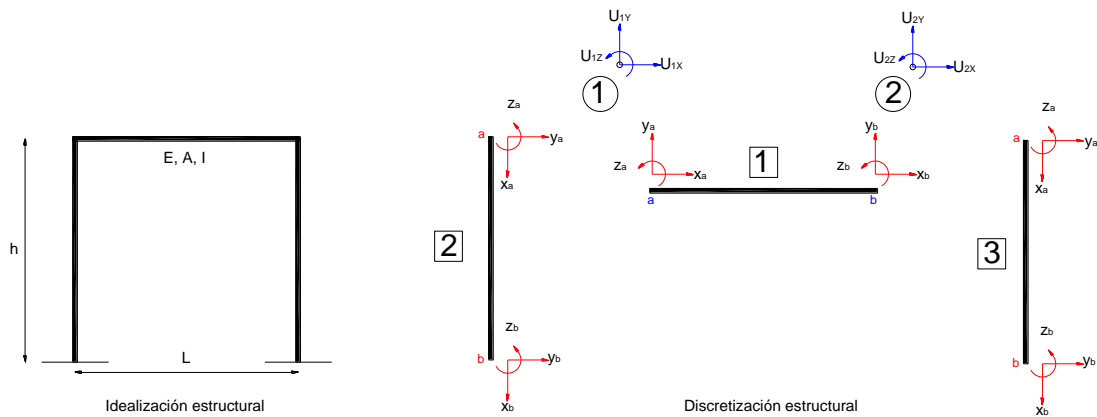


Figura 2.1 Idealización y discretización estructural.

Un modelo matemático siempre se basa en el enfoque de análisis que se desea utilizar, ya que dependiendo de dicho enfoque, aparecen o se descartan hipótesis que representan la estructura real, esto puede ser observado en la figura 2.2.

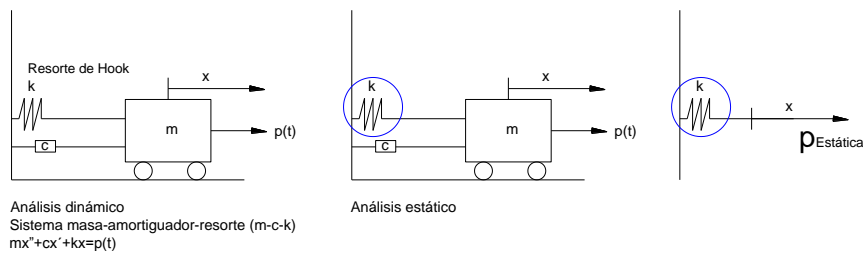


Figura 2.2 Análisis dinámico y análisis estático.

2.1.1 MODELO MATEMÁTICO

Teorema I de Castigliano: Si se aplica un conjunto de cargas sobre una estructura linealmente elástica y la energía de deformación E_D se expresa como una función de los desplazamientos en los puntos de aplicación de las cargas y actúa en sus direcciones, la derivada parcial de E_D con respecto a uno de estos desplazamientos Δ_x es igual a la carga correspondiente p_x . Es decir:

$$\frac{\partial E_D}{\partial \Delta_x} = p_x \quad \text{Ecuación 2.1}$$

Una estructura sometida a la acción de causas sufre deformaciones y los puntos de aplicación de las cargas se desplazan. Si las cargas se aplican gradualmente, la energía cinética impartida es despreciable. Si el sistema está aislado térmicamente, el trabajo total hecho por las fuerzas externas es igual al cambio de la energía interna.

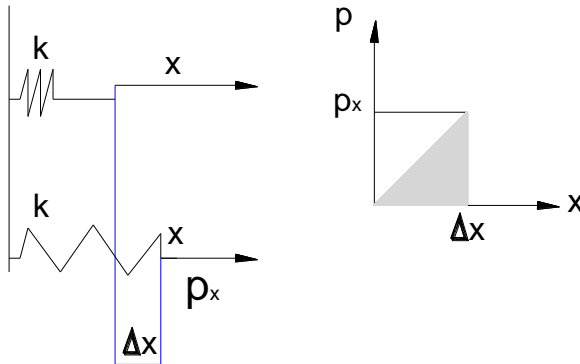


Figura 2.3 Modelo matemático para análisis estático.

Según la figura 2.3 donde p_x es la carga, Δ_x el desplazamiento asociado y k la rigidez del resorte, respectivamente y debido a que el proceso es gradual el trabajo hecho se puede expresar mediante:

$$E_D = \frac{1}{2} k \Delta_x^2 \quad \text{Ecuación 2.2}$$

Y al emplear el primer teorema de Castigliano (Ecuación 2.1)

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (k \Delta_x^2)}{\partial \Delta_x} = p_x \quad \text{Ecuación 2.3}$$

Es decir, que queda:

$$k \Delta_x = P_x \quad \text{Ecuación 2.4}$$

Esta ecuación expresa que tanto fuerzas y desplazamientos son proporcionales cuya constante de dicha proporcionalidad, es **k** denominada constante de rigidez.

2.1.2 MÉTODO MATRICIAL DE LA RIGIDEZ

El método matricial de la rigidez es un método de cálculo aplicable a estructuras hiperestáticas, de barras que se comportan elástica y linealmente, el cual se basa en el **primer teorema de Castigliano**, el cual consiste en asignarle al sistema estructural un objeto matemático, llamado matriz de rigidez, que relaciona los desplazamientos en los nodos con las fuerzas exteriores, las que es necesario aplicar para lograr dichos desplazamientos.

La matriz de rigidez relaciona las fuerzas nodales equivalentes y los desplazamientos sobre los nodos del sistema, mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{Bmatrix}_{mx1} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{m1} & K_{m2} & \cdots & K_{mm} \end{bmatrix}_{mxm} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{Bmatrix}_{mx1} \quad \text{Ecuación 2.5}$$

Y escrita de forma matricial:

$$\{F\} = [K]\{U\} \quad \text{Ecuación 2.6}$$

Dónde:

$\{F\}$ = Vector de fuerzas nodales equivalentes generalizadas

$[K]$ = Matriz de rigidez del sistema

$\{U\}$ =Vector de desplazamientos generalizados

La ecuación 2.2 esta expresada en coordenadas globales.

En general, para un sistema de m grados de libertad en el que se conocen las correspondientes fuerzas generalizadas, se tiene que calcular una matriz de rigidez de $m \times m$ que proporciona los coeficientes de un sistema de m incógnita

2.2 SISTEMAS DE COORDENADAS Y SU TRANSFORMACIÓN

Existen 2 sistemas de coordenadas cuando se analiza un pórtico plano, así que es necesario disponer de una manera de transformar de un sistema de coordenadas a otro de una forma sistemática. En la figura 2.4 se muestra un elemento de pórtico plano con los dos sistemas de coordenadas y su relación entre ellos.

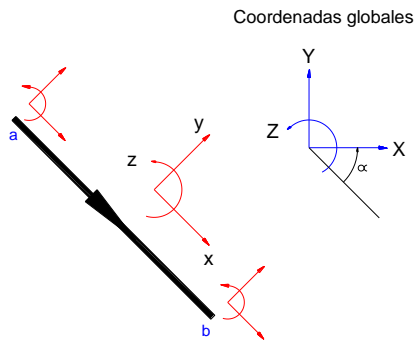


Figura 2.4 Elemento de pórtico plano en coordenadas locales

Los dos sistemas de coordenadas, **local** y **global** son sistemas dextrógiros. El sistema local siempre se define con el **eje x** a lo largo del eje longitudinal del elemento. El sentido positivo del eje **x** local es el sentido que se tiene al ir del nudo **a** al **b**. el **eje y** local siempre tiene su sentido positivo hacia la izquierda al ir en la dirección positiva de **x**. el **eje z** local se obtiene con la regla de la mano derecha y es perpendicular el plano **xy**. El eje **z** es positivo saliendo del plano del papel hacia el observador. El sistema global se define de la misma manera, solo que lo usual es que **X** global sea horizontal.

El ángulo α se define como el ángulo que se describe al ir del eje **x** local al eje **X** global, y es positivo en esa dirección.

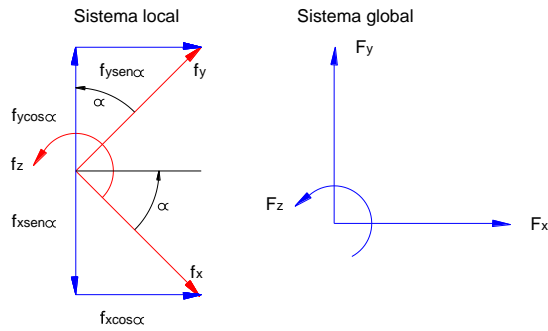


Figura 2.5 Transformación de local a global

Se tienen las fuerzas f_x , f_y y f_z en el sistema local mostrado en la figura 2.5.

Al utilizar el ángulo α se puede encontrar las componentes de las tres fuerzas sobre los ejes del sistema global, las cuales también se muestran en la figura.

Por tanto:

$$F_x = f_x \cos \alpha + f_y \sin \alpha$$

$$F_y = -f_x \sin \alpha + f_y \cos \alpha$$

$$F_z = f_z$$

Ecuación 2.7

Se define:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \text{ y } \{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}$$

Ecuación 2.8

Se busca una matriz $[\lambda]$ tal que:

$$\{F\} = [\lambda] \{f\}$$

Ecuación 2.9

De las expresiones 2.7 se puede notar que:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix}$$

Ecuación 2.10

Por lo tanto:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 2.11



Donde:

$[\lambda]$ = Matriz de transformación

Además la matriz de transformación, $[\lambda]$, tiene la propiedad de que es ortogonal, es decir, que su transpuesta es su inversa:

$$[\lambda]^T [\lambda] = [\lambda][\lambda]^T = [I] \quad \text{Ecuación 2.12}$$

Esto quiere decir que si se pre-multiplica ambos lados de la ecuación 2.9 por la transpuesta de la matriz de transformación, $[\lambda]^T$, se tiene:

$$[\lambda]^T \{F\} = [\lambda]^T [\lambda] \{f\} \quad \text{Ecuación 2.13}$$

Entonces:

$$\{f\} = [\lambda]^T \{F\} \quad \text{Ecuación 2.14}$$

Es decir que por medio de la matriz de transformación, $[\lambda]$, se puede transformar las fuerzas que se encuentran en el sistema local a fuerzas en el sistema global, e igualmente por medio de la transpuesta de la matriz de transformación, $[\lambda]^T$, se puede transformar las fuerzas del sistema global al sistema local.

2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO

Se determinara la matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales y luego se transformara del sistema de coordenadas local a global. Para establecer las relaciones entre fuerzas en los extremos del elemento y los desplazamientos también en sus extremos se utilizara la ecuación de **Pendiente-Deformación**, la cual indica que para un elemento en estado de deformación los momentos en los extremos que mantienen esta deformación están dados por las siguientes ecuaciones:

$$M_a = \frac{2EI}{L}(2\theta_a + \theta_b - 3\varphi) + M_a^E$$

$$M_b = \frac{2EI}{L}(\theta_a + 2\theta_b - 3\varphi) + M_b^E \quad \text{Ecuación 2.15}$$

Donde:

M_a = momento en el extremo **a** del elemento. Positivo en el sentido contra horario.

M_b = momento en el extremo **b** del elemento. Positivo en el sentido contra horario.

E = módulo de elasticidad del material del elemento.

I = momento de inercia de la sección del elemento.

L = longitud del elemento.

θ_a = giro en el extremo **a** del elemento. Positivo en el sentido contra horario.

θ_b = giro en el extremo **b** del elemento. Positivo en el sentido contra horario.

φ = pendiente de la línea que une los extremos **a** y **b** del elemento, medida con respecto a su situación original indeformada. Positiva en el sentido contra horario.

M_a^E y M_b^E son los momentos de empotramiento de las cargas externas dentro del elemento en los extremos **a** y **b** respectivamente.

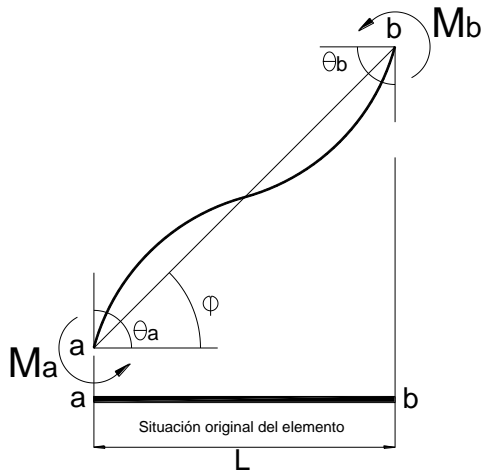


Figura 2.6 Parámetros de la ecuación de pendiente-deformación

Cuando a un elemento, en un estado inicial sin esfuerzos, se le aplican unas fuerzas en sus extremos, estas fuerzas producen una situación de deformación interna del elemento y desplazamientos en sus extremos con respecto a la situación inicial. Esta situación de deformación del elemento se mantiene mientras permanezcan las fuerzas que se aplicaron en sus extremos. Si estas se retiran el elemento vuelve a su situación original.

El elemento de **Pórtico Plano** tiene la posibilidad de recibir en cada uno de sus extremos una **Fuerza Axial** colineal con el eje del elemento, una **Fuerza Cortante** transversal al elemento y un **Momento Flector**. Esto conduce a un total de seis fuerzas externas que se pueden aplicar. Si estas fuerzas se conocen, es posible determinar las fuerzas internas del elemento en cualquier punto de él, pues al disponer de ellas es como tener un elemento isostático.

Por otro lado la situación de deformación interna del elemento se puede describir por medio de tres tipos de desplazamientos en cada uno de sus extremos, una **Deformación Colineal** con el eje longitudinal del elemento, una **Deformación Transversal** a este eje y un **Giro** con respecto a la posición original al eje. Esto lleva a un total de seis posibles desplazamientos en los extremos del elemento. Todos los desplazamientos y deformaciones internas del elemento se pueden describir con base a estos seis desplazamientos.

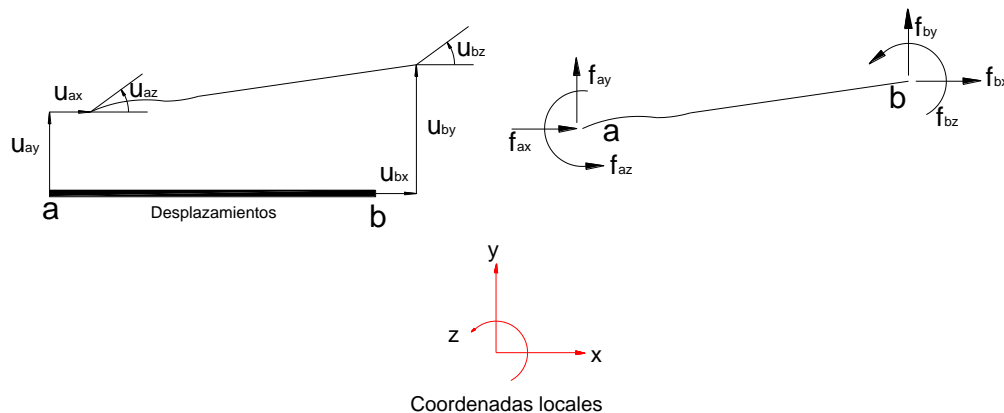


Figura 2.7 Fuerzas y desplazamientos en los extremos de un elemento de pórtico plano

En la figura 2.7 se muestra un elemento de pórtico plano en su posición original indeformada y en la deformada. Además, se muestran las fuerzas que se producen y mantienen este estado deformado. Tanto las fuerzas como los desplazamientos tienen la misma nomenclatura, donde la primera letra del subíndice hace referencia al extremo del elemento y la segunda letra a la dirección en el sistema local de coordenadas.



Se necesita buscar la relación que existe entre las seis fuerzas y los seis desplazamientos. Esta tiene la siguiente forma:

$$\{f\}_{6,1} = [k]_{6,6} \{u\}_{6,1} \quad \text{Ecuación 2.16}$$

Donde **[k]** es la matriz de rigidez del elemento. Para obtener la matriz de rigidez se impondrá una deformación unitaria a uno de sus grados de libertad, mientras se mantienen restringidos los desplazamientos de los otros. Las fuerzas que se generan en los grados de libertad restringidos son los términos correspondientes a la matriz de rigidez. Los desplazamientos se miden a partir de la situación sin esfuerzos del elemento. La ecuación 2.16 entonces es:

$$\begin{Bmatrix} f_{ax} \\ f_{ay} \\ f_{az} \\ f_{bx} \\ f_{by} \\ f_{bz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{axax} & k_{axay} & k_{axaz} & k_{axbx} & k_{axby} & k_{axbz} \\ k_{ayax} & k_{ayay} & k_{ayaz} & k_{aybx} & k_{ayby} & k_{aybz} \\ k_{azax} & k_{azay} & k_{azaz} & k_{azbx} & k_{azby} & k_{azbz} \\ k_{bmax} & k_{bmay} & k_{bmax} & k_{bmbx} & k_{bmby} & k_{bmbz} \\ k_{byax} & k_{byay} & k_{byaz} & k_{bybx} & k_{byby} & k_{bybz} \\ k_{bzax} & k_{bzay} & k_{bzaz} & k_{bzbx} & k_{bzby} & k_{bzbz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ax} \\ u_{ay} \\ u_{az} \\ u_{bx} \\ u_{by} \\ u_{bz} \end{Bmatrix}$$

Ecuación 2.17

Donde, el subíndice de cada término de la matriz de rigidez se refiere, el primero al término de la fuerza, y el segundo al desplazamiento que lo genera.

Así por ejemplo el termino ***k_{byaz}*** indica que esta relacionándose la fuerza en el nodo ***b*** en dirección ***y***, ***f_{by}***, generada por un desplazamiento del nodo ***a*** en la dirección ***z***, ***u_z***.

a) Se define así, las fuerzas cuando $u_{ax} = 1$, y se tiene en cuenta que todos los demás desplazamientos son nulos.

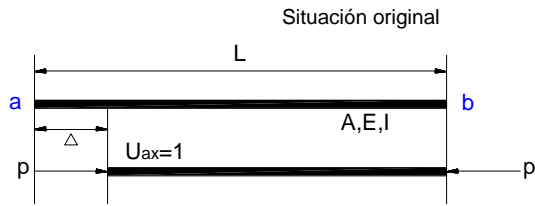


Figura 2.8 Desplazamiento unitario en el grado de libertad u_{ax}

Si se induce un desplazamiento Δ en el grado de libertad u_{ax} hay necesidad de imponer las fuerzas p mostradas en la figura 2.8 para poder mantener esta deformación. El esfuerzo en el elemento es:

$$\sigma = \frac{p}{A} \quad \text{Ecuación 2.18}$$

Y la deformación unitaria que induce este esfuerzo es:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{Ecuación 2.19}$$

Por lo tanto, la deformación axial total del elemento se calcula así:

$$\Delta = \int_0^L \varepsilon dx = \varepsilon L = \frac{\sigma}{E} L = \frac{pL}{EA} \quad \text{Ecuación 2.20}$$

Y

$$p = \frac{EA}{L} \Delta \quad \text{Ecuación 2.21}$$

Dado que Δ es una deformación unitaria, entonces:

$$k_{axax} = \frac{EA}{L} \quad \text{y} \quad k_{bxax} = -\frac{EA}{L} \quad \text{Ecuación 2.22}$$

Como la deformación axial no induce reacciones en los otros grados de libertad, todos los demás términos de la primera columna de $[k]$ son cero.

La matriz mostrada en 2.17 hasta el momento es:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & k_{axay} & k_{axaz} & k_{axbx} & k_{axby} & k_{axbz} \\ 0 & k_{ayay} & k_{ayaz} & k_{aybx} & k_{ayby} & k_{aybz} \\ 0 & k_{azay} & k_{azaz} & k_{azbx} & k_{azby} & k_{azbz} \\ -\frac{EA}{L} & k_{bxay} & k_{bxaz} & k_{bxbx} & k_{bxbby} & k_{bxbz} \\ 0 & k_{byay} & k_{byaz} & k_{bybx} & k_{byby} & k_{bybz} \\ 0 & k_{bzay} & k_{bzaz} & k_{bzbx} & k_{bzby} & k_{bzbz} \end{bmatrix}$$

Ecuación 2.23

b) Ahora se hace $u_{ay}=1$ y todos los demás desplazamiento son cero.

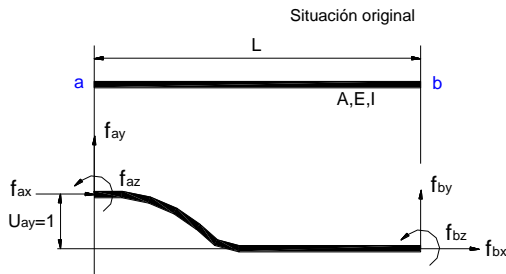


Figura 2.9 Desplazamiento unitario en el grado de libertad u_{ay}

Al expresar en términos de las variables de la ecuación de pendiente-deformación se tiene:



Figura 2.10 Fuerza en los extremos

De acuerdo con lo anterior:

$$M_a = \frac{2EI}{L}(2\theta_a + \theta_b - 3\varphi) = -\frac{6EI}{L}\varphi$$

$$M_b = \frac{2EI}{L}(\theta_a + 2\theta_b - 3\varphi) = -\frac{6EI}{L}\varphi$$

Ecuación 2.24

Pero $\varphi = -\Delta/L$ y $\Delta=1$ por lo tanto $\varphi = -1/L$ y entonces:

$$M_a = \frac{6EI}{L^2} \quad \text{y} \quad M_b = \frac{6EI}{L^2}$$

Ecuación 2.25

Se toma momento en **a** y se obtiene:

$$\sum M_a = \frac{6EI}{L^2} + \frac{6EI}{L^2} - V_b L = 0 \Rightarrow V_b = \frac{12EI}{L^3} \quad \text{Ecuación 2.26}$$

Se suman fuerzas verticales:

$$\sum F_v = V_a - V_b = 0 \Rightarrow V_b = V_a = \frac{12EI}{L^3} \quad \text{Ecuación 2.27}$$

Entonces los coeficientes de la segunda columna de la matriz de rigidez son:

$$\begin{aligned} k_{axay} &= 0 & k_{bxa y} &= 0 \\ k_{ayay} &= \frac{12EI}{L^3} & k_{byay} &= -\frac{12EI}{L^3} \\ k_{azay} &= \frac{6EI}{L^2} & k_{bza y} &= \frac{6EI}{L^2} \end{aligned}$$

La matriz mostrada en la ecuación 2.17 hasta el momento es:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & k_{axaz} & k_{axbx} & k_{axby} & k_{axbz} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & k_{ayaz} & k_{aybx} & k_{ayby} & k_{aybz} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & k_{azaz} & k_{azbx} & k_{azby} & k_{azbz} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & k_{bxa z} & k_{bxbx} & k_{bxb y} & k_{bxbz} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & k_{byaz} & k_{bybx} & k_{byby} & k_{bybz} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & k_{bza z} & k_{bzbx} & k_{bzb y} & k_{bzbz} \end{bmatrix}$$

Ecuación 2.28

c) Ahora se hace **$u_{az}=1$** y todos los demás desplazamientos son cero.

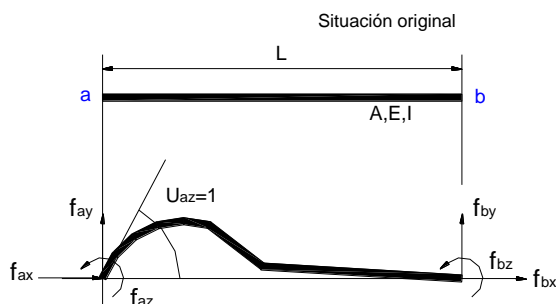


Figura 2.11 Desplazamiento unitario en el grado de libertad u_{az}

Se tiene la siguiente situación expresada en términos de la nomenclatura de la ecuación de pendiente-deformación:

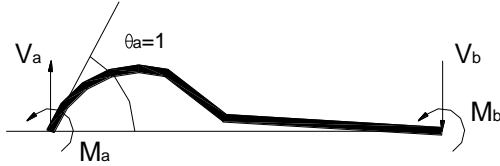


Figura 2.12 Fuerzas en los extremos

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{2EI}{L}(2\theta_a + \theta_b - 3\varphi) = \frac{4EI}{L} \\ M_b &= \frac{2EI}{L}(\theta_a + 2\theta_b - 3\varphi) = \frac{2EI}{L} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2.29}$$

Se toma momento en **a** y se obtiene:

$$\sum M_a = \frac{4EI}{L} + \frac{2EI}{L} - V_b L = 0 \Rightarrow V_b = \frac{6EI}{L^2} \quad \text{Ecuación 2.30}$$

Se suman las fuerzas verticales:

$$\sum F_v = V_a - V_b = 0 \Rightarrow V_b = V_a = \frac{6EI}{L^2} \quad \text{Ecuación 2.31}$$

Entonces los coeficientes de la tercera columna de la matriz son:

$$\begin{aligned} k_{axaz} &= 0 & k_{bxaz} &= 0 \\ k_{ayaz} &= \frac{6EI}{L^2} & k_{byaz} &= -\frac{6EI}{L^3} \\ k_{azaz} &= \frac{4EI}{L} & k_{bzaz} &= \frac{2EI}{L} \end{aligned}$$

La matriz mostrada en la ecuación 2.17 hasta el momento es:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & k_{axbx} & k_{axby} & k_{axbz} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & k_{aybx} & k_{ayby} & k_{aybz} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & k_{azbx} & k_{azby} & k_{azbz} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & k_{bxbx} & k_{bxbby} & k_{bxbz} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & k_{bybx} & k_{byby} & k_{bybz} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & k_{bzbx} & k_{bzby} & k_{bzbz} \end{bmatrix}$$

Ecuación 2.32

d) Se define así las fuerzas cuando $u_{bx} = 1$, y se tiene en cuenta que todos los demás desplazamientos son ceros.

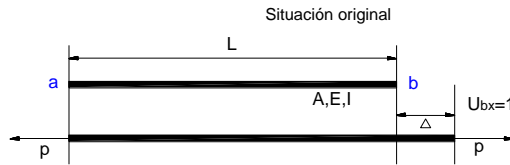


Figura 2.13 Desplazamiento unitario en el grado de libertad u_{bx}

Si se induce un desplazamiento Δ en el grado de libertad u_{bx} hay necesidad de imponer las fuerzas p mostradas en la figura 2.13 para poder mantener esta deformación. El esfuerzo en el elemento es:

$$\sigma = \frac{p}{A} \quad \text{Ecuación 2.33}$$

Y la deformación unitaria que induce este esfuerzo es:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{Ecuación 2.34}$$

Por lo tanto la deformación axial total del elemento se calcula así:

$$\Delta = \int_0^L \varepsilon dx = \varepsilon L = \frac{\sigma}{E} L = \frac{pL}{EA} \quad \text{Ecuación 2.35}$$



Y

$$p = \frac{EA}{L} \Delta$$

Ecuación 2.36

Dado que Δ es una deformación unitaria, entonces:

$$k_{axbx} = -\frac{EA}{L} \quad y \quad k_{bxbx} = \frac{EA}{L}$$

Ecuación 2.37

Como la deformación axial no induce reacciones en los otros grados de libertad, todos los demás términos de la cuarta columna de **[k]** son cero.

La matriz mostrada en 2.17 hasta el momento es:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & k_{axby} & k_{axbz} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & k_{ayby} & k_{aybz} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & k_{azby} & k_{azbz} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & k_{bxby} & k_{bxbz} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & k_{byby} & k_{bybz} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & k_{bzby} & k_{bzbz} \end{bmatrix}$$

Ecuación 2.38

e) Ahora se hace $u_{by}=1$ y todos los demás desplazamiento son cero.

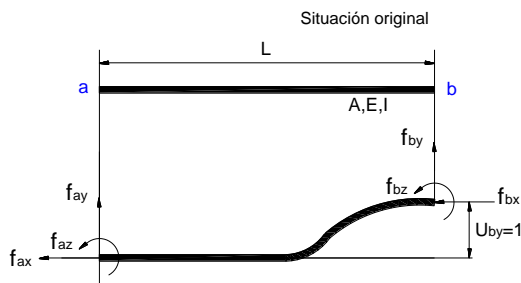


Figura 2.14 Desplazamiento unitario en el grado de libertad u_{by}



Al expresar en términos de las variables de la ecuación de pendiente-deformación se tiene:

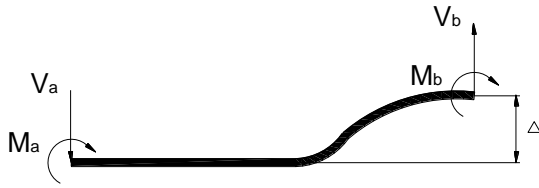


Figura 2.15 Fuerza en los extremos

De acuerdo con lo anterior:

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{2EI}{L}(2\theta_a + \theta_b - 3\varphi) = -\frac{6EI}{L}\varphi \\ M_b &= \frac{2EI}{L}(\theta_a + 2\theta_b - 3\varphi) = -\frac{6EI}{L}\varphi \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2.39}$$

Pero $\varphi = \Delta/L$ y $\Delta=1$ por lo tanto $\varphi = 1/L$ y entonces:

$$M_a = -\frac{6EI}{L^2} \quad \text{y} \quad M_b = -\frac{6EI}{L^2} \quad \text{Ecuación 2.40}$$

Se toma momento en **a** y se obtiene:

$$\sum M_a = -\frac{6EI}{L^2} - \frac{6EI}{L^2} + V_b L = 0 \Rightarrow V_b = \frac{12EI}{L^3} \quad \text{Ecuación 2.4}$$

Se suman fuerzas verticales:

$$\sum F_v = V_b - V_a = 0 \Rightarrow V_b = V_a = \frac{12EI}{L^3} \quad \text{Ecuación 2.42}$$

Entonces los coeficientes de la quinta columna de la matriz de rigidez son:

$$\begin{aligned} k_{axay} &= 0 & k_{baxay} &= 0 \\ k_{ayay} &= -\frac{12EI}{L^3} & k_{byay} &= \frac{12EI}{L^3} \\ k_{azay} &= -\frac{6EI}{L^2} & k_{bzay} &= -\frac{6EI}{L^2} \end{aligned}$$



La matriz mostrada en la ecuación 2.17 hasta el momento es:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & k_{axbz} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & k_{aybz} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & k_{azbz} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & k_{bxbz} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & k_{bybz} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & k_{bzbz} \end{bmatrix}$$

Ecuación 2.43

Se hace el mismo ejercicio para el desplazamiento unitario en u_{bz} , y debido a la propiedad de simetría que posee toda matriz de rigidez, se obtiene la matriz de rigidez en coordenadas locales del pórtico plano:

$$\begin{matrix} u_{ax} & u_{ay} & u_{az} & u_{bx} & u_{by} & u_{bz} \\ \left\{ \begin{matrix} f_{ax} \\ f_{ay} \\ f_{az} \\ f_{bx} \\ f_{by} \\ f_{bz} \end{matrix} \right\} & = & \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} & \left\{ \begin{matrix} u_{ax} \\ u_{ay} \\ u_{az} \\ u_{bx} \\ u_{by} \\ u_{bz} \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

Ecuación 2.44

Expresándolo en forma de submatrices se tiene:

$$\begin{matrix} u_a & u_b \\ \left\{ \begin{matrix} f_a \\ f_b \end{matrix} \right\} & = & \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} & \left\{ \begin{matrix} u_a \\ u_b \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

Ecuación 2.45

Donde $\{f_a\}$, $\{f_b\}$, $\{u_a\}$ $\{u_b\}$ son vectores de 3 filas y una columna y $[k_{aa}]$, $[k_{ab}]$, $[k_{ba}]$ y $[k_{bb}]$ son matrices de 3 filas y 3 columnas. Al expandir se tiene:

$$\{f_a\} = [k_{aa}]\{u_a\} + [k_{ab}]\{u_b\} = \{f_{aa}\} + \{f_{ab}\} \quad \text{Ecuación 2.46}$$

Y

$$\{f_b\} = [k_{ba}]\{u_a\} + [k_{bb}]\{u_b\} = \{f_{ba}\} + \{f_{bb}\} \quad \text{Ecuación 2.47}$$

Estas ecuaciones indican que las fuerzas en un extremo del elemento están compuestas por dos partes, una proveniente de los desplazamientos en el propio extremo, y la otra de los desplazamientos en el otro extremo. Gráficamente puede ser representado como:

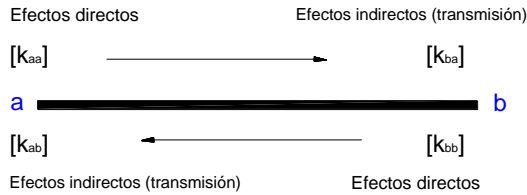


Figura 2.16 Efectos directos y transmitidos.

Por lo cual:

$$\{f_a\} = \{f_{aa}\} + \{f_{ab}\} \quad \text{Ecuación 2.48}$$

Y

$$\{f_b\} = \{f_{ba}\} + \{f_{bb}\} \quad \text{Ecuación 2.49}$$

Donde $\{f_{aa}\}$ son las fuerzas en el nodo **a** causadas por los desplazamientos del nodo **a**, y análogamente $\{f_{ab}\}$ son las fuerzas en el mismo nodo **a** causadas por los desplazamientos del nodo **b**; entonces, como regla general $\{f_{ij}\}$ son las fuerzas en el nodo **i** causadas por los desplazamientos en el nodo **j** y se obtiene por medio de la submatriz $[k_{ij}]$, de la siguiente manera:

$$\{f_{ij}\} = [k_{ij}]\{u_j\} \quad \text{Ecuación 2.50}$$

2.4 PRINCIPIO DE CONTRAGRADIENTE

Si se conoce la matriz que permite transformar las fuerzas de un sistema al otro. A esta matriz se le llamara $[T]$, entonces:

$$\{F\} = [T]\{f\} \quad \text{Ecuación 2.51}$$

Por otra parte, existe un estado de deformación del elemento asociado con las fuerzas que se aplicaron en sus extremos en el vector $\{f\}$. Este estado de deformaciones se puede describir por medio de los desplazamientos en los nodos del elemento por medio del vector $\{u\}$, donde los componentes de los desplazamientos están expresados en el sistema local. Análogamente existe un vector de desplazamientos, expresado en el sistema global, $\{U\}$ asociado con $\{F\}$. Las fuerzas y desplazamientos están asociados a través de las relaciones de rigidez, las cuales se pueden expresar para el sistema local de la siguiente manera:

$$\{f\} = [k]\{u\} \quad \text{Ecuación 2.52}$$

Y para el sistema global de la siguiente manera:

$$\{F\} = [K]\{U\} \quad \text{Ecuación 2.53}$$

Se dispone de relaciones entre $\{f\}$ y $\{F\}$, entre $\{f\}$ y $\{u\}$ y entre $\{F\}$ y $\{U\}$. Pero, no se dispone de una manera de relacionar $\{U\}$ con $\{u\}$. Esta última relación se puede buscar de la siguiente manera: se sabe que el trabajo que han realizado las fuerzas a través del desplazamiento puede expresarse como:

$$W = \frac{1}{2} \{U\}^T \{F\} \quad \text{Ecuación 2.54}$$

Y de forma análoga:

$$w = \frac{1}{2} \{u\}^T \{f\} \quad \text{Ecuación 2.55}$$

Estas ecuaciones de trabajo son válidas siempre y cuando los sistemas de coordenadas tengan componentes ortogonales, de tal manera que cada componente de fuerza solo puede hacer trabajo con un desplazamiento colineal, es decir en la dirección de su propio eje de coordenadas. Además, el trabajo es invariable con respecto a los sistemas de coordenadas; pues, al observar el



elemento estructural con un sistema de coordenadas u otro no varía el trabajo total que se realiza al deformarlo. Por tanto $\mathbf{W}=\mathbf{w}$ entonces:

$$\frac{1}{2}\{U\}^T \{F\} = \frac{1}{2}\{u\}^T \{f\} \quad \text{Ecuación 2.56}$$

Ahora se substituye la ecuación 2.51 en la ecuación anterior y se eliminan los términos iguales a ambos lados y se tiene:

$$\{U\}^T [T] \{f\} = \{u\}^T \{f\} \quad \text{Ecuación 2.57}$$

O

$$\{U\}^T [T] = \{u\}^T \quad \text{Ecuación 2.58}$$

Se aplica $([A][B])^T = [A]^T[B]^T$ lo cual lleva a:

$$\{u\} = [T]^T \{U\} \quad \text{Ecuación 2.59}$$

Es decir, que se ha probado que la misma matriz de transformación $[T]$ que se utiliza para cambiar el sistema de coordenadas de las fuerzas, opera para transformar los desplazamientos, pero a través de $[T]^T$. Esta propiedad se conoce con el nombre de **Principio de Contra gradiente**.

2.5 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO EN COORDENADAS GLOBALES

La relación de fuerzas y deformaciones para el sistema de coordenadas locales de un elemento son:

$$\{f\} = [k] \{u\} \quad \text{Ecuación 2.60}$$

Y en coordenadas globales:

$$\{F\} = [K] \{U\} \quad \text{Ecuación 2.61}$$

Por medio de la ecuación 2.9 se puede convertir los vectores de fuerzas de un sistema de coordenadas al otro,

$$\{F\} = [\lambda] \{f\} \quad \text{Ecuación 2.62}$$

Y con el principio de contra gradiente se tiene:

$$\{u\} = [\lambda]^T \{U\} \quad \text{Ecuación 2.63}$$

Al reemplazar la ecuación 2.63 en la ecuación 2.60:



$$\{f\} = [k][\lambda]^T \{U\} \quad \text{Ecuación 2.64}$$

Y la ecuación 2.64 en la ecuación 2.62:

$$\{F\} = [\lambda][k][\lambda]^T \{U\} \quad \text{Ecuación 2.65}$$

Que es igual a la ecuación 2.61 por lo tanto:

$$[K] = [\lambda][k][\lambda]^T \quad \text{Ecuación 2.66}$$

Al aplicar la ecuación anterior en la ecuación 2.50 se obtiene:

$$\{F_{ij}\} = [K_{ij}]\{U\} = [\lambda][k_{ij}][\lambda]^T \{U_j\} \quad \text{Ecuación 2.67}$$

Por lo tanto la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales es:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} F_a \\ F_b \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [\lambda][K_{aa}][\lambda]^T & [\lambda][K_{ab}][\lambda]^T \\ [\lambda][K_{ba}][\lambda]^T & [\lambda][K_{bb}][\lambda]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_a \\ U_b \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2.68}$$

Al establecer:

$$\rho = \frac{EI}{L^3} \quad \beta = \frac{AL^2}{I} \quad s = \sin \alpha \quad c = \cos \alpha$$

α = Angulo entre el eje x local y el eje X global de la figura 2.4

La matriz de rigidez para un elemento en coordenadas globales es:

$$[K] = \rho \begin{bmatrix} \beta c^2 + 12s^2 & sc(12 - \beta) & 6Ls & -\beta c^2 - 12s^2 & sc(\beta - 12) & 6Ls \\ sc(12 - \beta) & \beta s^2 + 12c^2 & 6Lc & sc(\beta - 12) & -\beta s^2 - 12c^2 & 6Lc \\ 6Ls & 6Lc & 4L^2 & -6Ls & -6Lc & 2L^2 \\ -\beta c^2 - 12s^2 & sc(\beta - 12) & -6Ls & \beta c^2 + 12s^2 & sc(12 - \beta) & -6Ls \\ sc(\beta - 12) & -\beta s^2 - 12c^2 & -6Lc & sc(12 - \beta) & \beta s^2 + 12c^2 & -6Lc \\ 6Ls & 6Lc & 2L^2 & -6Ls & -6Lc & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Ecuación 2.69

2.5.1 MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO VIGA EN COORDENADAS GLOBALES

Se sabe que el ángulo $\alpha = 0$ al ver la figura 2.17

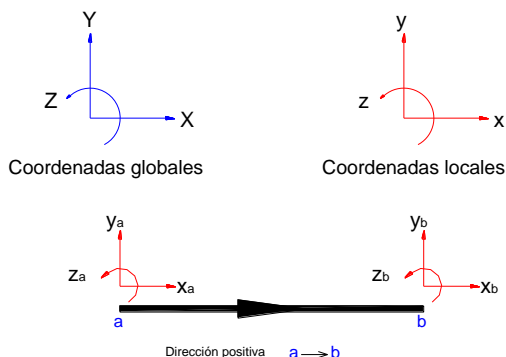


Figura 2.17 Elemento viga

Al hacer el cálculo con la ecuación 2.69 resulta:

$$[K^v] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{aX} \\ U_{aY} \\ U_{aZ} \\ U_{bX} \\ U_{bY} \\ U_{bZ} \end{Bmatrix}$$

Ecuación 2.70

En submatrices:

$$[K^v] = \begin{bmatrix} K_{aa}^v & K_{ab}^v \\ K_{ba}^v & K_{bb}^v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_a \\ U_b \end{Bmatrix}$$

Ecuación 2.71

2.5.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO COLUMNA EN COORDENADA GLOBALES

Se sabe que el ángulo $\alpha = 90^\circ$ al ver la figura 2.18

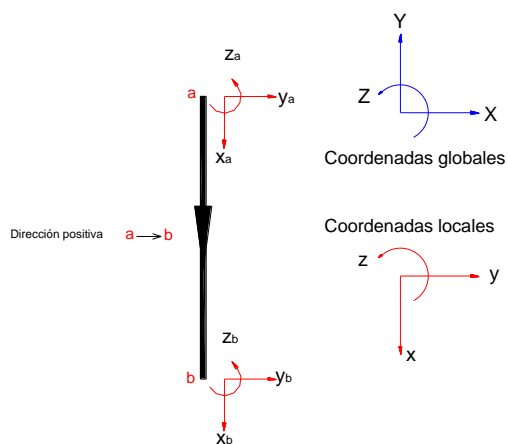


Figura 2.18 Elemento columna

Al hacer el cálculo con la ecuación 2.69 resulta:

$$[K^c] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{h^3} & 0 & \frac{6EI}{h^2} & -\frac{12EI}{h^3} & 0 & \frac{6EI}{h^2} \\ 0 & \frac{EA}{h} & 0 & 0 & -\frac{EA}{h} & 0 \\ \frac{6EI}{h^2} & 0 & \frac{4EI}{h} & -\frac{6EI}{h^2} & 0 & \frac{2EI}{h} \\ -\frac{12EI}{h^3} & 0 & -\frac{6EI}{h^2} & \frac{12EI}{h^3} & 0 & -\frac{6EI}{h^2} \\ 0 & -\frac{EA}{h} & 0 & 0 & \frac{EA}{h} & 0 \\ \frac{6EI}{h^2} & 0 & \frac{2EI}{h} & -\frac{6EI}{h^2} & 0 & \frac{4EI}{h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{aX} \\ U_{aY} \\ U_{aZ} \\ U_{bX} \\ U_{bY} \\ U_{bZ} \end{Bmatrix}$$

Ecuación 2.72

En submatrices:

$$[K^c] = \begin{bmatrix} K_{aa}^c & K_{ab}^c \\ K_{ba}^c & K_{bb}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_a \\ U_b \end{Bmatrix}$$

Ecuación 2.73

2.6 ENSAMBLE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

Ahora que se conoce la matriz de rigidez del elemento viga y del elemento columna en coordenadas globales se puede plantear el ensamble de la matriz de rigidez de pórticos planos, a través de tres conceptos definidos como: **Estructuración, Vinculación y Concatenación.**

Para esto se dispone del pórtico idealizado y discretizado en la figura 2.19

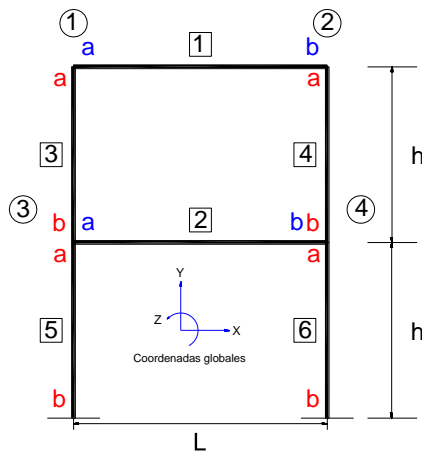


Figura 2.19 Pórtico reticular de 1 crujías y 2 niveles

2.6.1 ESTRUCTURACIÓN

Consiste básicamente en plantear la matriz de rigidez ensamblada en submatrices de orden 3×3 (tres grados de libertad por nodo) de aquellos nodos con posibles desplazamientos (no se consideran los nodos de la base), esta estructuración brinda la ubicación de cada nodo en la matriz ensamblada. Por lo tanto:

$$[K_p] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{matrix} U1 \\ U2 \\ U3 \\ U4 \end{matrix}$$

Donde K_{ij} representa los coeficientes de rigidez en el nodo i debido a los desplazamientos en nodo j . La matriz de estructuración tendrá un orden de $n \times n$



donde n representa en número de nodos que tiene el sistema (subíndice P de pórtico).

Otros aspectos que pueden ser observados en la **estructuración** al usar la figura 2.19 son:

- 1- La diagonal principal representa las submatrices de efectos directos de cada nodo (rojo).
- 2- A partir de la numeración de los nodos las submatrices de efectos transmitidos (indirectos) los proporcionaran primeramente la matriz del elemento viga y posteriormente la matriz del elemento columna, para formar matrices de bandas (color azul y luego color fucsia).
- 3- La submatrices nulas son representadas por el color negro

2.6.2 VINCULACIÓN

Consiste en identificar las submatrices de cada elemento que se suman en cada coeficiente K_{ij} representado anteriormente en la estructuración.

a) Al hacer el procedimiento para la primera columna se tiene:

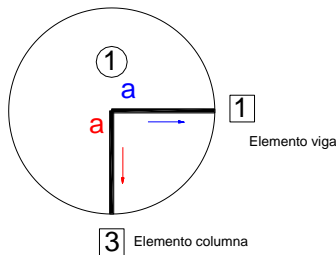


Figura 2.20 Efectos directos en el nodo 1.

Según la figura 2.20, K_{11} representa los efectos propios en el nodo 1 donde convergen el extremo inicial del elemento viga 1 y el extremo inicial del elemento columna 3.

Por lo tanto $K_{11} = K_{aa}^{V1} + K_{aa}^{C3}$

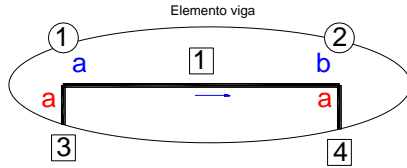


Figura 2.21 Efectos indirectos en el nodo 2.

Según la figura 2.21, K_{21} representa los efectos transmitidos al nodo 2, a través del elemento viga 1.

Por lo tanto $K_{21} = K_{ba}^{v1}$

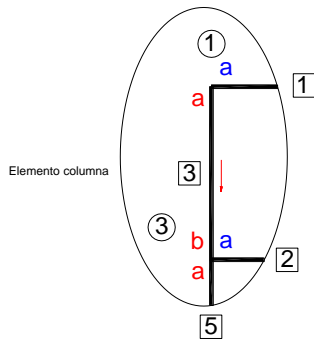


Figura 2.22 Efectos indirectos en el nodo 3.

Según la figura 2.22, K_{31} representa los efectos transmitidos al nodo 3, a través del elemento columna 3.

Por lo tanto $K_{31} = K_{ba}^{c3}$

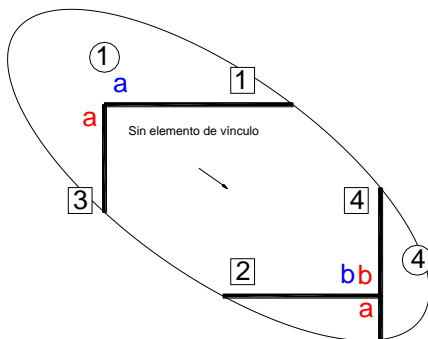


Figura 2.23 Efectos indirectos en el nodo 4.

Según la figura 2.23, K_{41} representa los efectos transmitidos al nodo 4 y debido a que no existe sistemas de brazos rigidizante que vincule dichos nodos aparece una submatriz nula.

Por lo tanto $K_{41} = 0$

b) Al hacer el procedimiento para la primera fila se tiene:

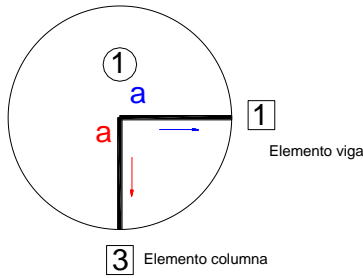


Figura 2.24 Efectos directos en el nodo 1.

Según la figura 2.24, K_{11} representa los efectos propios en el nodo 1 donde convergen el extremo inicial del elemento viga 1 y el extremo inicial del elemento columna 3.

Por lo tanto $K_{11} = K_{aa}^{v1} + K_{aa}^{c3}$

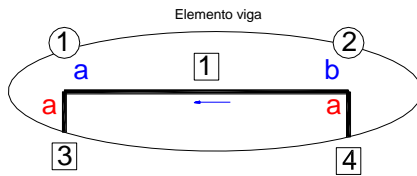


Figura 2.25 Efectos indirectos en el nodo 1 a causa del nodo 2.

Según la figura 2.25, K_{12} representa los efectos transmitidos del nodo 2 al nodo 1, a través del elemento viga 1.

Por lo tanto $K_{12} = K_{ab}^{v1}$

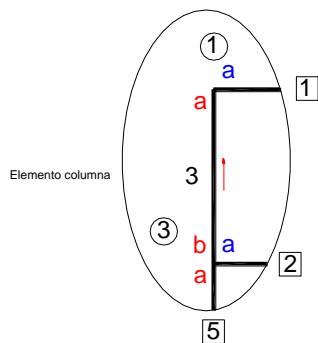


Figura 2.26 Efectos indirectos en el nodo 1 a causa del nodo 3.

Según la figura 2.26, K_{13} representa los efectos transmitidos del nodo 3 al nodo 1, a través del elemento columna 3.

Por lo tanto $K_{13} = K_{ab}^{c3}$

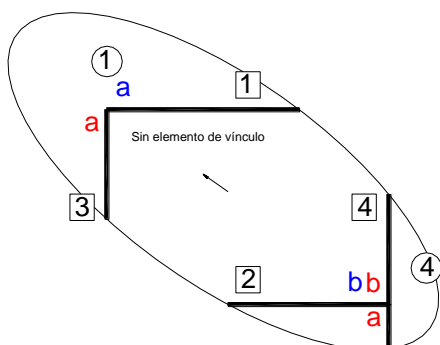


Figura 2.27 Efectos indirectos en el nodo 1 a causa del nodo 4.

Según la figura 2.27, K_{14} representa los efectos transmitidos del nodo 4 al nodo 1 y debido a que no hay elemento que vincule dichos nodos aparece una submatriz nula.

Por lo tanto $K_{14} = 0$

Por lo cual, se dispone de dos alternativas para realizar la vinculación de la matriz de rigidez.

Vinculación para el pórtico de la figura 2.19

$$\begin{array}{llll}
 K_{11} = K_{aa}^{v1} + K_{aa}^{c3} & K_{12} = K_{ab}^{v1} & K_{13} = K_{ab}^{c3} & K_{14} = 0 \\
 K_{21} = K_{ba}^{v1} & K_{22} = K_{bb}^{v1} + K_{aa}^{c4} & K_{23} = 0 & K_{24} = K_{ab}^{c4} \\
 K_{31} = K_{ba}^{c3} & K_{32} = 0 & K_{33} = K_{bb}^{v2} + K_{bb}^{c3} + K_{aa}^{c5} & K_{34} = K_{ab}^{v2} \\
 K_{41} = 0 & K_{42} = K_{ba}^{c4} & K_{43} = K_{ba}^{v2} & K_{44} = K_{bb}^{v2} + K_{bb}^{c4} + K_{aa}^{c6}
 \end{array}$$

2.6.3 CONCATENACIÓN

Consiste en ubicar cada término de la vinculación dentro de la estructuración de la matriz de rigidez. Por lo tanto:

Concatenación para el pórtico de la figura 2.19

$$[K_P] = \begin{bmatrix}
 K_{aa}^{v1} + K_{aa}^{c3} & K_{ab}^{v1} & K_{ab}^{c3} & 0 \\
 K_{ba}^{v1} & K_{bb}^{v1} + K_{aa}^{c4} & 0 & K_{ab}^{c4} \\
 K_{ba}^{c3} & 0 & K_{bb}^{c3} + K_{aa}^{c5} + K_{aa}^{v2} & K_{ab}^{v2} \\
 0 & K_{ba}^{c4} & K_{ba}^{v2} & K_{bb}^{v2} + K_{bb}^{c4} + K_{aa}^{c6}
 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$



Lo que resta hasta el momento es introducir valores numéricos para cada submatriz y realizar las operaciones convenientes.

Ejemplo 2.1

Se considera el pórtico idealizado mostrado en la figura 2.28, al cual se desea encontrar las reacciones en los apoyos:

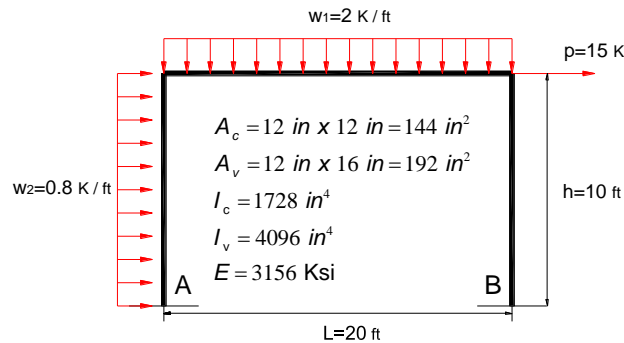


Figura 2.28 Pórtico reticular de 1 crujeas y 1 nivel

Paso a: Determinar la matriz de rigidez en coordenadas globales del pórtico.

a.1) Discretización

Se procede a discretizar el pórtico, por lo que queda:

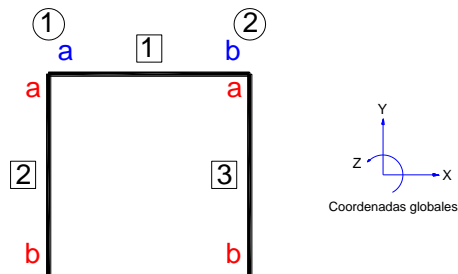


Figura 2.29 Discretización del ejemplo 2.1.

a.2) Estructuración:

La matriz de rigidez estará estructurada de la siguiente manera:

$$[K_p] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

Debido a que tiene solo 2 nodos libres



a.3) Vinculación:

Si se utiliza el procedimiento **2.6.2 a)** se tiene:

$$K_{11} = K_{aa}^{v1} + K_{aa}^{c2}$$

$$K_{21} = K_{ba}^{v1}$$

$$K_{12} = K_{ab}^{v1}$$

$$K_{22} = K_{bb}^{v1} + K_{aa}^{c2}$$

a.4) Concatenación:

La concatenación de la matriz de rigidez queda de la siguiente manera:

$$[K_p] = \left[\begin{array}{c|c} \overset{U_1}{K_{aa}^{v1} + K_{aa}^{c2}} & \overset{U_2}{K_{ab}^{v1}} \\ \hline \overset{U_1}{K_{ba}^{v1}} & \overset{U_2}{K_{bb}^{v1} + K_{aa}^{c2}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \end{array} \right\}$$

Según la ecuación 2.70 y 2.72 se tiene:

$$K_{aa}^{v1} + K_{aa}^{c2} = \left[\begin{array}{c|c|c} \overset{U_{1x}}{\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{h^3}} & 0 & \frac{6EI}{h^2} \\ \hline 0 & \frac{EA}{h} + \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \hline \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{1z} \end{array} \right\}$$

Y:

$$K_{bb}^{v1} + K_{aa}^{c2} = \left[\begin{array}{c|c|c} \overset{U_{2x}}{\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{h^3}} & 0 & \frac{6EI}{h^2} \\ \hline 0 & \frac{EA}{h} + \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \hline \frac{6EI}{h^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{2z} \end{array} \right\}$$



MATRIZ DE RIGIDEZ DE EFECTOS HORIZONTALES - HIPOTESIS DE DIAFRAGMA RÍGIDO.

$$K_{ba}^{v1} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2X} \\ U_{2Y} \\ U_{2Z} \end{Bmatrix}$$

$$K_{ab}^{v1} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{1Z} \end{Bmatrix}$$

Por lo que la matriz de rigidez en coordenadas globales queda:

$$[K_p] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{h^3} & 0 & \frac{6EI}{h^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{h} + \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{h^3} & 0 & \frac{6EI}{h^2} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{EA}{h} + \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{h^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{1Z} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \\ U_{2Z} \end{Bmatrix}$$

$$[K_p] = \begin{bmatrix} 2562.67 & 0 & 2272.32 & -2524.80 & 0 & 0 \\ 0 & 3798.42 & 1346.56 & 0 & -11.22 & 1346.56 \\ 2272.32 & 1346.56 & 397235.20 & 0 & -1346.56 & 107724.80 \\ -2524.80 & 0 & 0 & 2562.67 & 0 & 2272.32 \\ 0 & -11.22 & -1346.56 & 0 & 3798.42 & -1346.56 \\ 0 & 1346.56 & 107724.80 & 2272.32 & -1346.56 & 397235.20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{1Z} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \\ U_{2Z} \end{Bmatrix}$$

Paso b: Determinar las fuerzas de fijación y momentos de empotramientos:

b.1) Fuerzas de empotre en los elementos en coordenadas globales

Se tiene:

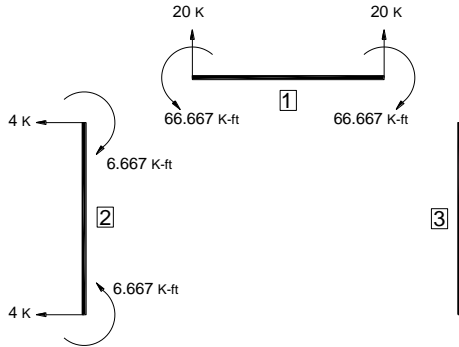


Figura 2.30 Fuerzas en coordenadas locales.

Las fuerzas de empotre en cada elemento son:

$$\begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix}_{E1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \\ 66.667 \\ 0 \\ 20 \\ -66.667 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix}_{E2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -4 \\ -6.667 \\ 0 \\ -4 \\ 6.667 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix}_{E3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b.2) Fuerzas de empotre en los elementos en coordenadas locales

Al transformar las fuerzas a coordenadas globales a través de la matriz de transformación de la ecuación 2. 9 se tiene:

Elemento 2 $\alpha=90^\circ$

$$\begin{Bmatrix} F_a \\ F_b \end{Bmatrix}_{E2} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix}_{E2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -4 \\ -6.667 \\ 0 \\ -4 \\ 6.667 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 \\ 0 \\ -6.667 \\ -4 \\ 0 \\ 6.667 \end{Bmatrix}$$



Elemento 3 $\alpha=90^\circ$

$$\begin{Bmatrix} F_a \\ F_b \end{Bmatrix}_{E3} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix}_{E3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elemento 1 $\alpha=0^\circ$

$$\begin{Bmatrix} F_a \\ F_b \end{Bmatrix}_{E1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix}_{E1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \\ 66.667 \\ 0 \\ 20 \\ -66.667 \end{Bmatrix}$$

b.2) Fuerzas de empotre en los nodos en coordenadas globales

Fuerzas de empotramiento en los nodos:

$$\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{1Z} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{2Z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \\ 66.667 \\ 0 \\ 20 \\ -66.667 \end{Bmatrix}_{E1} + \begin{Bmatrix} -4 \\ 0 \\ -6.667 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{E2} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{E3} = \begin{Bmatrix} -4 k \\ 20 k \\ 60 k - ft \\ 0 k \\ 20 k \\ -66.667 k - ft \end{Bmatrix}$$

Paso c: Aplicación de fuerzas y momentos elásticos

Las fuerzas de fijación y momento de empotramientos calculados existirían si se restringieran de movimiento a los nodos, lo que no sucede, pues en realidad están libres. Por lo tanto las fuerzas efectivas sobre los nodos actúan en realidad en sentido contrario, por lo tanto se tiene:

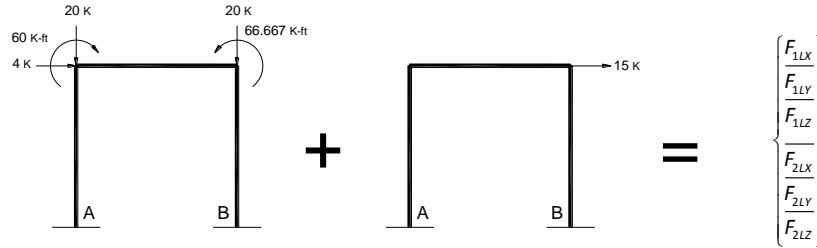


Figura 2.31 Fuerzas elásticas en coordenadas globales.

Al hacer las operaciones convenientes se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} F_{1LX} \\ F_{1LY} \\ F_{1LZ} \\ F_{2LX} \\ F_{2LY} \\ F_{2LZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -20 \\ -60 \\ 0 \\ -20 \\ 66.667 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \text{ k} \\ -20 \text{ k} \\ -60 \text{ k-ft} \\ 15 \text{ k} \\ -20 \text{ k} \\ 66.667 \text{ k-ft} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \text{ k} \\ -20 \text{ k} \\ -720 \text{ k-in} \\ 15 \text{ k} \\ -20 \text{ k} \\ 800 \text{ k-in} \end{Bmatrix}$$

Paso d: Encontrar los desplazamientos en coordenadas globales

Al resolver para:

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ -20 \\ -720 \\ 15 \\ -20 \\ 800 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2562.67 & 0 & 2272.32 & -2524.80 & 0 & 0 \\ 0 & 3798.42 & 1346.56 & 0 & -11.22 & 1346.56 \\ 2272.32 & 1346.56 & 397235.20 & 0 & -1346.56 & 107724.80 \\ -2524.80 & 0 & 0 & 2562.67 & 0 & 2272.32 \\ 0 & -11.22 & -1346.56 & 0 & 3798.42 & -1346.56 \\ 0 & 1346.56 & 107724.80 & 2272.32 & -1346.56 & 397235.20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{1Z} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \\ U_{2Z} \end{Bmatrix}$$

Se encuentran los siguientes desplazamientos:

$$\begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{1Z} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \\ U_{2Z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.337652 \\ -0.004259 \\ -0.004071 \\ 0.337468 \\ -0.006303 \\ 0.001181 \end{Bmatrix}$$



Paso e: Encontrar las fuerzas en los elementos

Obtenidos estos desplazamientos el problema se reduce a encontrar las fuerzas en lo elementos en coordenadas locales con la siguiente fórmula:

$$\{f\}_{Elemento} = [\lambda]_{Elemento}^T [K]_{Elemento} \{U\}_{Elemento} \quad \text{Ecuación 2.74}$$

Elemento 2 con $\alpha=90^\circ$:

$$[K^c]_{E2} = \begin{bmatrix} \overset{U_{1X}}{37.872} & \overset{U_{1Y}}{0} & \overset{U_{1Z}}{2272.320} & \overset{U_{AX}}{-37.872} & \overset{U_{AY}}{0} & \overset{U_{AZ}}{2272.320} \\ 0 & 3787.200 & 0 & 0 & -3787.200 & 0 \\ 2272.320 & 0 & 181785.600 & -2272.320 & 0 & 90892.800 \\ -37.872 & 0 & -2272.320 & 37.872 & 0 & -2272.320 \\ 0 & -3787.200 & 0 & 0 & 3787.200 & 0 \\ 2272.320 & 0 & 90892.800 & -2272.320 & 0 & 181785.600 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{1Z} \\ U_{AX} \\ U_{AY} \\ U_{AZ} \end{Bmatrix}$$

$$\{U\}_{E2} = \begin{Bmatrix} U_a \\ U_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.337652 \\ -0.004259 \\ -0.004071 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad y \quad [\lambda]_{E2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \left\{ \frac{f_a}{f_b} \right\}_{E2} = \begin{Bmatrix} 16.131 \\ 3.537 \\ 2.265 \\ -16.131 \\ -3.537 \\ 33.101 \end{Bmatrix}$$

Elemento 3 con $\alpha=0^\circ$:

$$\{U\}_{E3} = \begin{Bmatrix} U_a \\ U_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.337468 \\ -0.006303 \\ 0.001181 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad y \quad [\lambda]_{E2} = [\lambda]_{E3} ; \quad \left\{ \frac{f_a}{f_b} \right\}_{E3} = \begin{Bmatrix} 23.869 \\ 15.463 \\ 81.787 \\ -23.869 \\ -15.463 \\ 72.845 \end{Bmatrix}$$



Y las fuerzas totales son:

$$\{f\}_{T2} = \left\{ \frac{f_a}{f_b} \right\}_2 + \left\{ \frac{f_a}{f_b} \right\}_{Empotre} = \begin{Bmatrix} 16.130 \\ 3.536 \\ 2.265 \\ -16.131 \\ -3.536 \\ 33.101 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -4 \\ -6.667 \\ 0 \\ -4 \\ 6.667 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 16.130 \text{ k} \\ -0.463 \text{ k} \\ -4.401 \text{ k-ft} \\ -16.131 \text{ k} \\ -7.536 \text{ k} \\ 39.768 \text{ k-ft} \end{Bmatrix}$$

$$\{f\}_{T3} = \left\{ \frac{f_a}{f_b} \right\}_2 + \left\{ \frac{f_a}{f_b} \right\}_{Empotre} = \begin{Bmatrix} 23.869 \\ 15.463 \\ 81.787 \\ -23.869 \\ -15.463 \\ 72.845 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 23.869 \text{ k} \\ 15.463 \text{ k} \\ 81.787 \text{ k-ft} \\ -23.869 \text{ k} \\ -15.463 \text{ k} \\ 72.845 \text{ k-ft} \end{Bmatrix}$$

Las reacciones en la base del pórtico son:

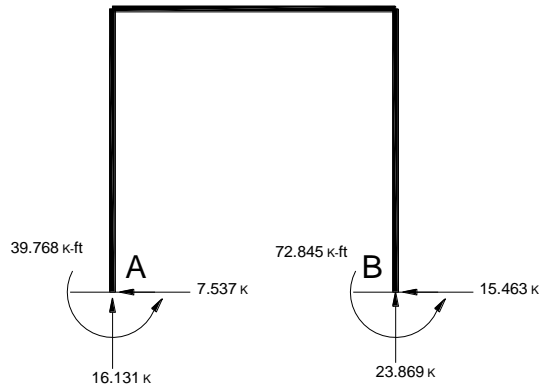


Figura 2.32 Reacciones.

Comparación de resultados con ETABS versión 9.6.0.0

Nodo	Esfuerzos	M. Rigidez	ETABSv9.6.0	Discrepancia
A	Axial	16.131	16.131	0.00%
	Cortante	-7.537	-7.537	0.00%
	Flexión	39.768	39.768	0.00%
B	Axial	23.869	23.869	0.00%
	Cortante	-15.463	-15.463	0.00%
	Flexión	72.845	72.845	0.00%

CAPITULO III

MATRIZ DE RIGIDEZ DE EFECTOS HORIZONTALES DE PÓRTICOS PLANOS

3.1 INTRODUCCIÓN

Se ha mostrado que para pórticos reticulares la matriz de rigidez en coordenadas globales tiene dimensiones de $3n \times 3n$ donde n es el número de nodos libres. Estos tres grados de libertad por nodo plantean el concepto general del método matricial de la rigidez, pero a medida que se requiere conocer algunas respuestas particulares de la estructura y en este caso específico, los desplazamientos laterales que experimenta al ser sometida a acciones de fuerzas nodales horizontales en cada nivel, es necesario introducir algunas simplificaciones al método matricial de la rigidez, siempre y cuando la estructura cumpla con los criterios para ello.

3.2 IGUALACIÓN DE GRADOS DE LIBERTAD

Se supone un pórtico de p grados de libertad, el cual tiene k ecuaciones de ligadura que relacionan linealmente los p grados de libertad entre ellos, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}U_1 & + & a_{12}U_2 & + & \dots & + & a_{1p}U_p & = & 0 \\ a_{21}U_1 & + & a_{22}U_2 & + & \dots & + & a_{2p}U_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}U_1 & + & a_{k2}U_2 & + & \dots & + & a_{kp}U_p & = & 0 \end{array}$$

Ecuación 3.1

donde los coeficientes a_{ij} son números reales. Este sistema de ecuaciones puede expresarse matricialmente como:

$$[A]_{k,p} \{U\}_{p,1} = \{0\}_{k,1}$$

Ecuación 3.2

Por cada ecuación de ligadura se genera una dependencia entre un grado de libertad y otro, por lo tanto el sistema de ecuaciones anterior nos indica que existen k grados de libertad que dependen de los $I = p - k$ grados de libertad independientes. Se hacen particiones de $\{U\}_{p,1}$ en $\{U_D\}_{k,1}$ con los grados de libertad dependientes y $\{U_I\}_{I,1}$ con los grados de libertad independientes y análogamente al particionar $[A]_{k,p}$ en $[A_D]_{k,k}$ y $[A_I]_{k,I}$ se tiene:

$$[A]_{k,p} \{U\}_{p,1} = [A_I \mid A_D] \begin{Bmatrix} U_I \\ U_D \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \text{Ecuación 3.3}$$

Y

$$[A_I \mid A_D] \begin{Bmatrix} U_I \\ U_D \end{Bmatrix} = [A_I]_{k,I} \{U_I\}_{I,1} + [A_D]_{k,k} \{U_D\}_{k,1} = \{0\} \quad \text{Ecuación 3.4}$$

Al despejar $\{U_D\}$ de la ecuación anterior se obtiene:

$$\{U_D\} = -[A_D]^{-1} [A_I] \{U_I\} = [R_0] \{U_I\} \quad \text{Ecuación 3.5}$$

Al reemplazar:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_I \\ U_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I \\ [R_0] \end{Bmatrix} \{U_I\} = [R] \{U_I\} \quad \text{Ecuación 3.6}$$

Y

$$\{U\}_{p,1} = [R]_{p,I} \{U_I\}_{I,1} \quad \text{Ecuación 3.7}$$

Estas ecuaciones indican que se puede expresar todos los p grados de libertad de la estructura, $\{U\}$, solo en función de los I grados de libertad independiente, $\{U_I\}$.

Se sabe que la ecuación 2.53 plantea:

$$\{F\} = [K] \{U\} \quad \text{Ecuación 3.8}$$

Y al aplicar el **Principio de Contragradiante** a la ecuación 3.7 se tiene:

$$\{F_I\} = [R]^T \{F\} \quad \text{Ecuación 3.9}$$

Al reemplazar la ecuación 3.8 en 3.9 se tiene:

$$\{F_I\} = [R]^T [K] \{U\} \quad \text{Ecuación 3.10}$$



Y al reemplazar 3.7 en 3.10:

$$\{F_i\} = [R]^T [K] [R] \{U_i\} \quad \text{Ecuación 3.11}$$

Por lo tanto:

$$[K_i] = [R]^T [K] [R] \quad \text{Ecuación 3.12}$$

Esto muestra que se ha expresado la matriz de rigidez de la estructura en función únicamente de los I grados de libertad independientes.

3.2.1 DEFORMACIONES AXIALES EN LAS COLUMNAS

La influencia de las deformaciones axiales en las columnas es importante en la respuesta de la estructura bajo la acción de cargas horizontales. Esta influencia depende de la esbeltez de la estructura. Cuando se trata de pórticos poco esbeltos, bajos y largos, las deformaciones axiales pueden ser despreciadas, este criterio se cumple cuando:

$$\frac{H}{B} \leq 5 \quad \text{Ecuación 3.13}$$

Donde:

H: altura del pórtico

B: ancho del pórtico

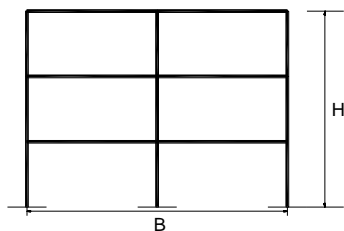


Figura 3.1 Criterio para despreciar las deformaciones axiales en las columnas.

3.2.2 DEFORMACIONES AXIALES EN LAS VIGAS

Las columnas de los pórticos sujetos a cargas horizontales tienen punto de inflexión siempre y cuando las vigas sean suficientemente rígidas para imponerles el efecto de doble curvatura, esto quiere decir que las vigas son mucho más rígidas que las columnas. En este caso las deformaciones axiales en las vigas pueden ser despreciadas

Este criterio se cumple cuando:

$$\beta = \frac{\sum \frac{I_{vi}}{L_{vi}}}{\sum \frac{I_{cj}}{h_{cj}}} \geq 0.35 \quad \text{Ecuación 3.14}$$

Donde:

β : Efecto de doble curvatura.

I_{vi} : Inercia de la viga i .

L_{vi} : Longitud de la viga i .

I_{cj} : Inercia de la columna j .

L_{cj} : Longitud de la columna j .

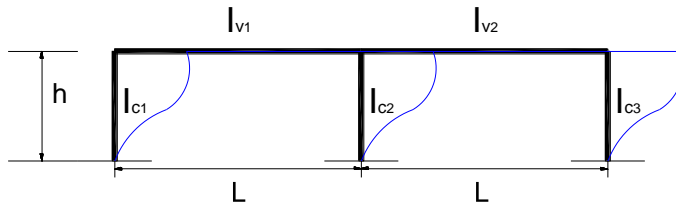


Figura 3.2 Criterio para despreciar las deformaciones axiales en las vigas.

Con lo antes expuesto se procede a averiguar qué efectos causa la eliminación de las deformaciones axiales sobre la matriz de rigidez.

Se utiliza el pórtico discretizado del ejemplo 2.1

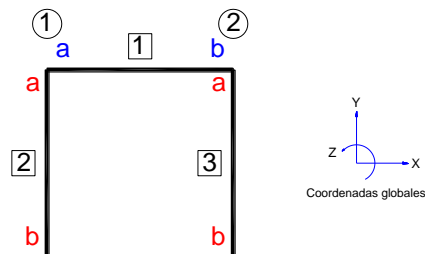


Figura 3.3 Pórtico discretizado.

Para poder suprimir las deformaciones axiales en los elementos hay necesidad de establecer las ecuaciones de ligadura correspondientes. Esto se hace para cada uno de los elementos.

Elemento 1:

Se calcula si la viga produce el efecto de doble curvatura:

$$\sum \frac{I_v}{L} = \frac{4096 \text{ in}^4}{240 \text{ in}} = 17.067 \text{ in}^3$$

$$\sum \frac{I_c}{h} = \frac{1728 \text{ in}^4}{120 \text{ in}} + \frac{1728 \text{ in}^4}{120 \text{ in}} = 28.8 \text{ in}^3$$

$$\beta = \frac{17.067 \text{ in}^3}{28.8 \text{ in}^3} = 0.592$$

Por lo tanto pueden eliminarse la deformación axial en la viga, esto significa que el **nodo 1** como el **nodo 2** tienen el mismo desplazamiento horizontal, por lo que solo se requiere un grado de libertad horizontal por nivel.

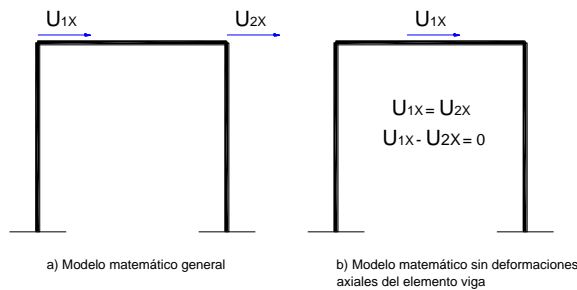


Figura 3.4 Pórtico sin deformación axial de su viga.

Elemento 2 y 3

Se calcula si se puede despreciar las deformaciones axiales en las columnas:

$$\frac{H}{B} = \frac{10}{20} = 0.5 < 5$$

Por lo tanto se pueden despreciar las deformaciones axiales en las columnas y las siguientes ecuaciones de ligadura son validas:

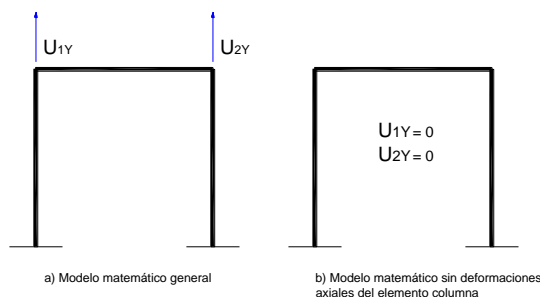


Figura 3.5 Pórtico sin deformaciones axiales de sus columnas.

Por lo tanto se ha pasado de un modelo matemático que puede ser representado gráficamente por la siguiente figura:

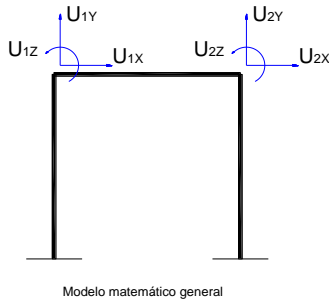


Figura 3.6 Pórtico con tres grados de libertad por nodo.

A uno incapaz de sufrir deformaciones axiales por parte de sus elementos, representado gráficamente a través de la siguiente figura:

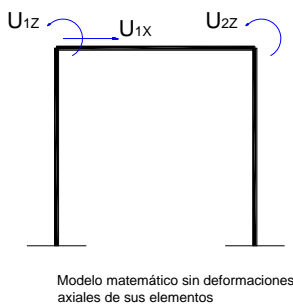


Figura 3.7 Pórtico con un grado de libertad horizontal por nivel y un grado de libertad rotacional por nodo.

Y ahora matemáticamente con la ecuación 3.2 se tiene:

$$[A]\{U\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{1Z} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \\ U_{2Z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Al tomar como variable independiente U_{1X} , U_{1Z} y U_{2Z} resulta:

$$\begin{bmatrix} U_i \\ U_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Z} \\ U_{2Z} \\ U_{2X} \\ U_{1Y} \\ U_{2Y} \end{bmatrix} \quad [A_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Z} \\ U_{2Z} \end{Bmatrix} \quad [A_d] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2X} \\ U_{1Y} \\ U_{2Y} \end{Bmatrix}$$

$$[A_d]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [R_0] = -[A_d]^{-1}[A_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} [I] \\ [R_0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Z} \\ U_{2Z} \\ U_{2X} \\ U_{1Y} \\ U_{2Y} \end{Bmatrix}$$

La matriz de rigidez del pórtico en coordenadas globales reorganizadas las filas y las columnas de acuerdo a los grados de libertades independientes y dependientes es:

$$[K_p] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{6EI}{h^2} & \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{h^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{EA}{h} + \frac{12EI}{L^3} & -\frac{12EI}{L^3} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{EA}{h} + \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Z} \\ U_{2Z} \\ U_{2X} \\ U_{1Y} \\ U_{2Y} \end{Bmatrix}$$



Se utiliza la ecuación 3.12 y se tiene:

$$[R]^T [K_p] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{6EI}{h^2} & \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{h^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{EA}{h} + \frac{12EI}{L^3} & -\frac{12EI}{L^3} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{EA}{h} + \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

Por lo que queda:

$$[R]^T [K_p] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{12EI}{h^3} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1x} \\ U_{1z} \\ U_{2z} \end{Bmatrix}$$

Y al realizar la siguiente operación:

$$[R]^T [K_p] [R] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{12EI}{h^3} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que queda:

$$[K_i] = \begin{bmatrix} \frac{24EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1x} \\ U_{1z} \\ U_{2z} \end{Bmatrix}$$



Y mostrada en forma de submatrices se tiene:

$$[K_I] = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 \\ K_2 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_z \end{Bmatrix}$$

Donde:

K₀: Submatriz cuadrada de grados de libertad horizontales de orden igual al número de niveles del pórtico.

K₁: Submatriz de efectos transmitidos por parte de los grados de libertad rotacionales, el número de filas es igual el número de niveles del pórtico y el número de columnas igual al número de nodos del pórtico.

K₂: Submatriz de efectos transmitidos por parte de los grados de libertad horizontales, el número de filas es igual el número de nodos del pórtico y el número de columnas igual al número de niveles del pórtico.

K₃: Submatriz cuadrada de grados de libertad rotacionales de orden igual al número de nodos del pórtico

Según las ecuaciones 2.46 y 2.47 ahora la respuesta del sistema depende de dos tipos de efectos, efectos horizontales y efectos rotacionales:

$$\begin{aligned} \{F_x\} &= \begin{matrix} \text{Grados de libertad horizontales} \end{matrix} [K_0] \{U_x\} + \begin{matrix} \text{Efectos transmitidos} \end{matrix} [K_1] \{U_z\} \\ \{F_z\} &= \begin{matrix} \text{Efectos transmitidos} \end{matrix} [K_2] \{U_x\} + \begin{matrix} \text{Grados de libertad rotacionales} \end{matrix} [K_3] \{U_z\} \end{aligned}$$

Figura 3.8 componentes del modelo matemático sin deformaciones axiales.

Como se pudo notar la primera operación $[R]^T[K_p]$ suma las filas de los grados de libertad igualados del elemento viga y elimina los grados de libertad verticales del elemento columna, análogamente la segunda operación lo hace con las columnas de la matriz de rigidez. Efectivamente desaparece el término de área de la matriz de rigidez del pórtico.



Procedimientos para ensamblar la matriz de rigidez sin posibilidad de deformaciones axiales:

- 1- Continuar con el ensamble de submatrices de 3 x 3 y luego sumar filas y columnas de los grados de libertad horizontales en un mismo nivel y eliminar filas y columnas de los grados de libertad verticales.
- 2- Ensamblar termino a términos a través del siguiente procedimiento:
Aplicar un desplazamiento unitario horizontal por cada nivel del pórtico y se encuentran los respectivos coeficientes de rigidez y luego giros unitarios en cada nodo y nuevamente se encuentran los coeficientes de rigidez asociados con esos giros, esto se hace por cada nivel del pórtico y por cada nodo libre, lo que resulta:

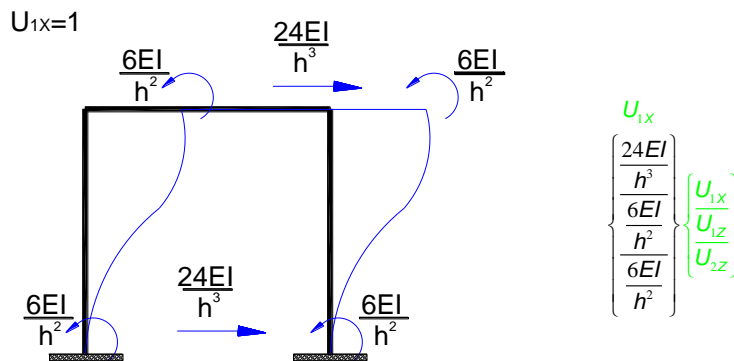


Figura 3.9 Desplazamiento unitario en el primer nivel del pórtico.

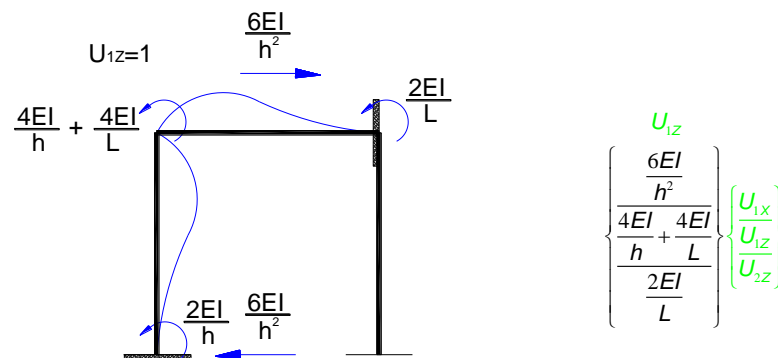


Figura 3.10 Giro unitario en el primer nodo del pórtico.

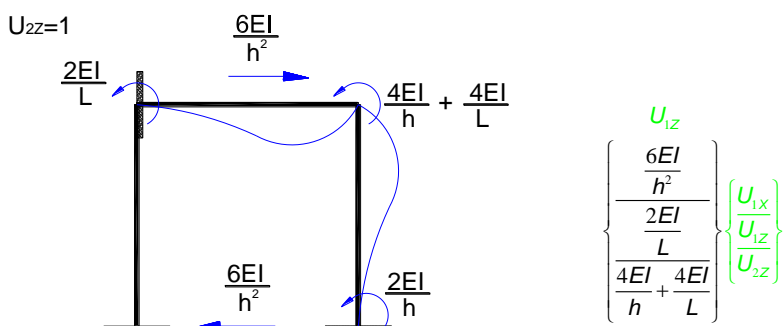


Figura 3.11 Giro unitario en el segundo nodo del pórtico.

Al ensamblar la matriz columna a columna se obtiene:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{24EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1x} \\ U_{1z} \\ U_{2z} \end{Bmatrix}$$

Que es la misma respuesta que se obtuvo anteriormente. Este modelo matemático no tiene posibilidades de deformaciones axiales en sus elementos.

3.3 CONDENSACIÓN DE GRADOS DE LIBERTAD

Condensación estática: La condensación estática es un procedimiento matricial mediante el cual se reduce una matriz de orden. En el análisis de estructuras al utilizar el método matricial de la rigidez, esta manipulación es conveniente para representar una estructura o un elemento en función de un menor número de grados de libertad que los actualmente empleados en su formulación general.

Interesa obtener la matriz de rigidez del sistema en función de los grados de libertad de desplazamientos horizontales únicamente, por lo tanto:



Se tiene un sistema en el cual se puede plantear la siguiente relación de rigidez:

$$\{F\} = [K_s]\{U\} \quad \text{Ecuación 3.15}$$

Si algunas de las fuerzas externas aplicadas sobre el sistema representado en el vector $\{F\}$ son nulas, se puede particionar el vector $\{F\}$ de la siguiente manera:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_c \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Ecuación 3.16}$$

donde $\{F_c\}$ corresponde a las fuerzas externas aplicadas en los nodos que no son cero.

Análogamente se puede particionar el vector $\{U\}$ de la siguiente manera:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_c \\ U_0 \end{Bmatrix} \quad \text{Ecuación 3.17}$$

Donde $\{U_c\}$ son los desplazamientos de los grados de libertad de donde hay fuerzas externas aplicadas, y $\{U_0\}$ son los desplazamientos de los grados de libertad donde las fuerzas son cero, estos últimos desplazamientos no son nulos.

La matriz $[K_s]$ puede particionarse de la siguiente manera para reflejar la partición de vectores:

$$\begin{Bmatrix} F_c \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_0] & [K_1] \\ [K_2] & [K_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_c \\ U_0 \end{Bmatrix} \quad \text{Ecuación 3.18}$$

Al expandir la última ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} \{F_c\} &= [K_0]\{U_c\} + [K_1]\{U_0\} \\ \{0\} &= [K_2]\{U_c\} + [K_3]\{U_0\} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 3.19}$$

De la segunda igualdad de la ecuación 3.19 queda:

$$\{U_0\} = -[K_3]^{-1}[K_2]\{U_c\} \quad \text{Ecuación 3.20}$$

Y al reemplazar en la primera igualdad de la ecuación 3.19 lleva a:

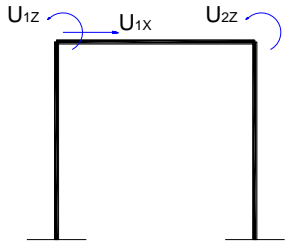
$$\{F_c\} = \left[[K_0] - [K_1][K_3]^{-1}[K_2] \right] \{U_c\} \quad \text{Ecuación 3.21}$$

Por lo tanto se ha reducido en sistema únicamente a los grados de libertad donde hay fuerzas externas aplicadas, y la matriz de rigidez del sistema se ha reducido a:

$$[K_c] = [K_0] - [K_1][K_3]^{-1}[K_2]$$

Ecuación 3.22

Al emplear la matriz de rigidez del pórtico del ejemplo 2.1 sin posibilidad de deformaciones axiales se tiene:

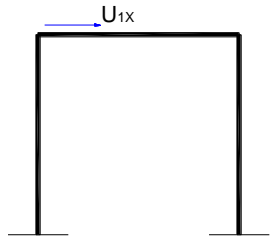


$$[K_i] = \begin{bmatrix} \frac{24EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1x} \\ U_{1z} \\ U_{2z} \end{Bmatrix}$$

Modelo matemático sin deformaciones axiales de sus elementos

Figura 3.12 Pórtico sin posibilidad de deformaciones axiales.

Al aplicar la ecuación 3.22 se obtiene:



$$[K_c] = [K_0] - [K_1][K_3]^{-1}[K_2]$$

Modelo matemático limitado al empleo de fuerzas horizontales.

Figura 3.13 Pórtico con los grados de libertad rotacionales condensados.

$$[K_c] = \begin{bmatrix} \frac{24EI}{h^3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{6EI}{h^2} \\ \frac{6EI}{h^2} \end{bmatrix}$$

Este modelo matemático resultante no tiene posibilidades de deformaciones axiales en sus elementos y además está limitado al empleo de fuerzas horizontales.

3.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DE EFECTOS HORIZONTALES DE UN PÓRTICO PLANO

El procedimiento para obtener la matriz de rigidez de efectos horizontales de pórticos planos es de la siguiente manera.

- 1- Obtener la matriz de rigidez de rigidez en coordenadas globales del pórtico a través de la suma de las submatrices de 3×3 .
- 2- Verificar si se pueden eliminar las deformaciones axiales en los elementos con los criterios antes expuestos, si es así, sumar filas y columnas de los grados de libertad horizontales en cada nivel y eliminar filas y columnas de los grados de libertad verticales.
- 3- Ordenar la matriz resultante de acuerdo a la ecuación 3.18 y hacer las operaciones correspondientes de la ecuación 3.22.

Este procedimiento se realiza debido a que es necesario mantener todos los grados de libertad empleados en la formulación general del método matricial de la rigidez por cualquier cambio futuro en el modelo matemático.

Ejemplo 3.1

Se considera el pórtico idealizado mostrado en la figura 3.14, al cual se desea encontrar los desplazamientos laterales en cada nivel:

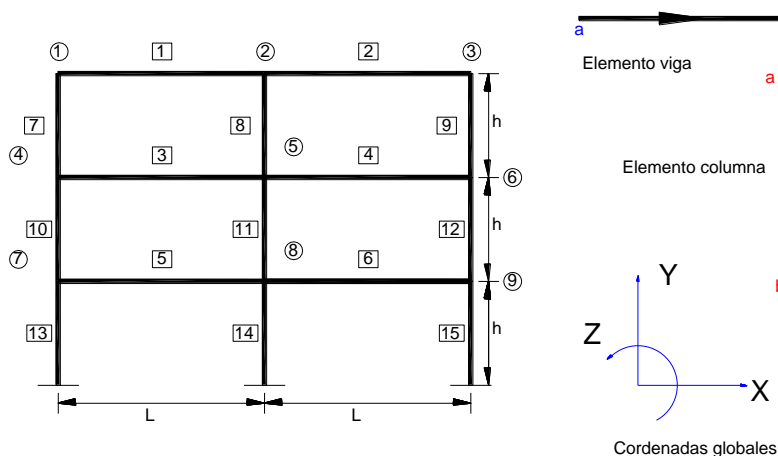


Figura 3.14 Pórtico de concreto de tres niveles y dos crujías



Propiedades de la estructura:

vigas: 12" x 20" $I_v = 8000 \text{ in}^4$

$L = 20 \text{ ft}$

columnas: 16" x 16" $I_c = 5461.333 \text{ in}^4$

$h = 10 \text{ ft}$

concreto:

$w_c = 150 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$ $f'_c = 4000 \text{ psi}$

$$E_c = \frac{33 \times w_c^{1.5} \times \sqrt{f'_c}}{1000} \text{ ksi} = 3834.25 \text{ ksi} \quad \text{ACI-318-08-8.5.1}$$

Verificar si se pueden despreciar las deformaciones axiales en los elementos

Columnas:

$$\frac{H}{B} = \frac{30}{40} = 0.75 < 5$$

Por lo tanto si pueden despreciarse las deformaciones axiales en las columnas

Vigas: para todos los entrepisos

$$\sum \frac{I_v}{L} = \frac{8000 \text{ in}^4}{240 \text{ in}} + \frac{8000 \text{ in}^4}{240 \text{ in}} = 66.667 \text{ in}^3$$

$$\sum \frac{I_c}{h} = \frac{5461.33 \text{ in}^4}{120 \text{ in}} + \frac{5461.33 \text{ in}^4}{120 \text{ in}} + \frac{5461.33 \text{ in}^4}{120 \text{ in}} = 136.533 \text{ in}^3$$

$$\beta = \frac{66.667 \text{ in}^3}{136.53 \text{ in}^3} = 0.488 > 0.35$$

Por lo tanto si pueden despreciarse las deformaciones axiales en las vigas.



Los coeficientes de rigidez sin tomar en cuenta las deformaciones axiales en los elementos y al usar la forma alternativa son:

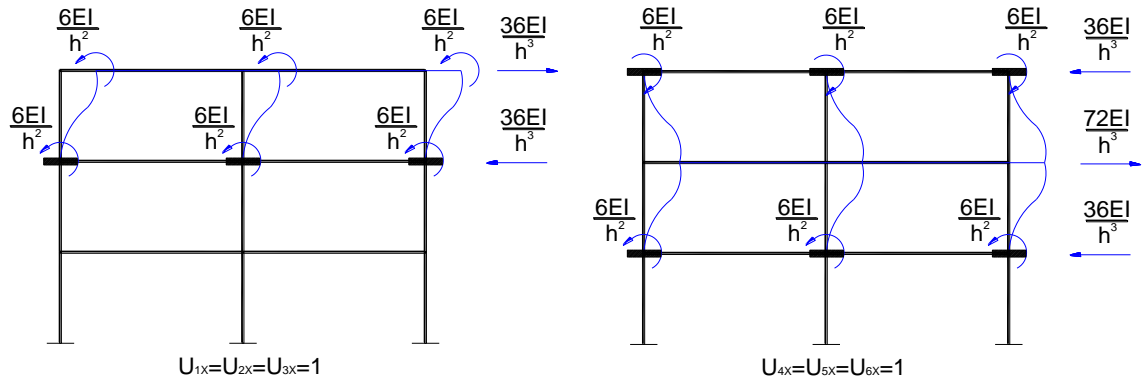


Figura 3.15 Desplazamiento unitario en el tercer y segundo nivel del pórtico.

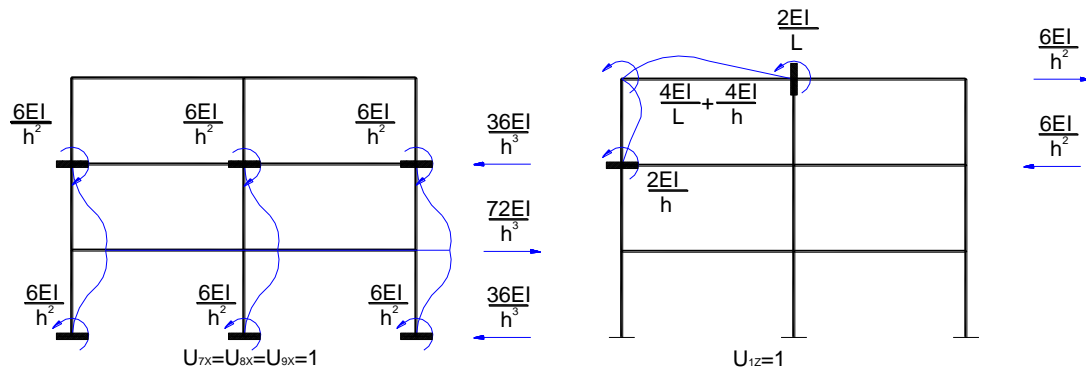


Figura 3.16 Desplazamiento unitario en el primer nivel del pórtico y giro unitario en el primer nodo.

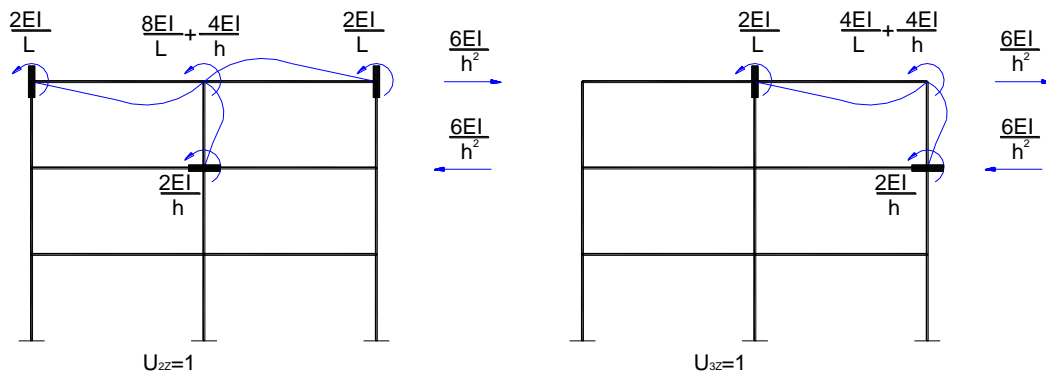


Figura 3.17 Giro unitario en el segundo y tercer nodo del pórtico.



MATRIZ DE RIGIDEZ DE EFECTOS HORIZONTALES - HIPOTESIS DE DIAFRAGMA RÍGIDO.

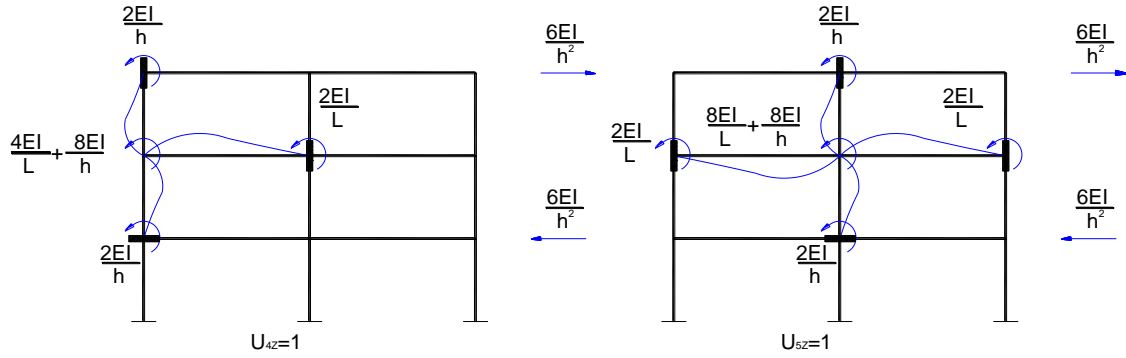


Figura 3.18 Giro unitario en el cuarto y quinto nodo del pórtico.

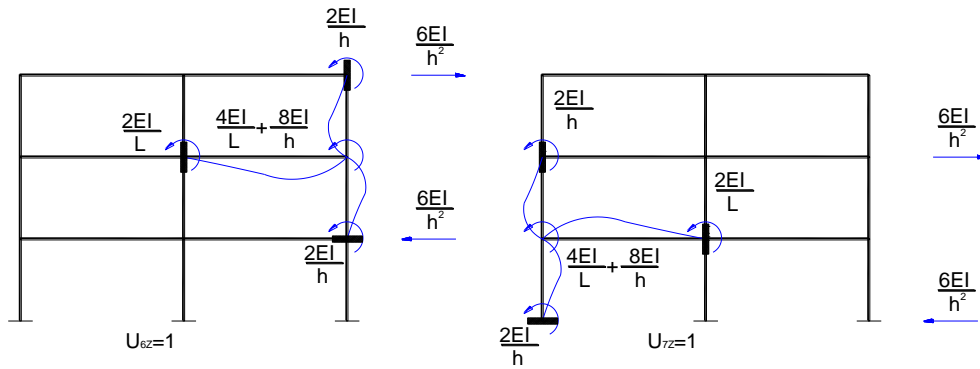


Figura 3.19 Giro unitario en el sexto y séptimo nodo del pórtico.

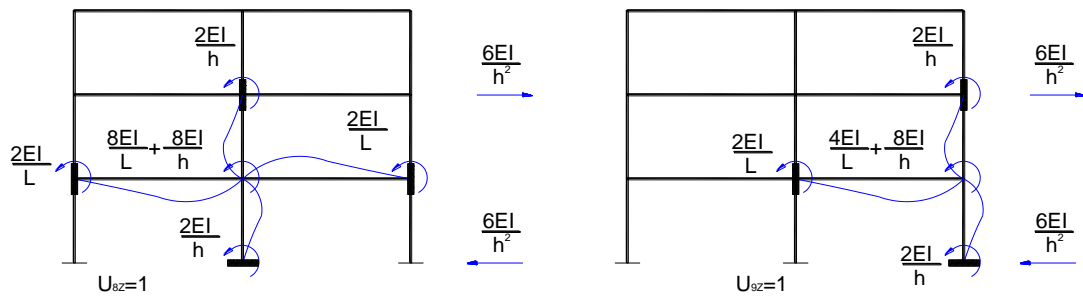


Figura 3.20 Giro unitario en el octavo y noveno nodo del pórtico.



MATRIZ DE RIGIDEZ DE EFECTOS HORIZONTALES - HIPOTESIS DE DIAFRAGMA RÍGIDO.

Al hacer el ensamble columna a columna se tiene:

$$[K_I] = \begin{bmatrix} \frac{36EI}{h^3} & -\frac{36EI}{h^3} & 0 & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{36EI}{h^3} & \frac{72EI}{h^3} & -\frac{36EI}{h^3} & -\frac{6EI}{h^2} & -\frac{6EI}{h^2} & -\frac{6EI}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} \\ 0 & -\frac{36EI}{h^3} & \frac{72EI}{h^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{h^2} & -\frac{6EI}{h^2} & -\frac{6EI}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{h^2} & -\frac{6EI}{h^2} & 0 & \frac{4EI}{h} + \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{2EI}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{h^2} & -\frac{6EI}{h^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{h} + \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{2EI}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{h^2} & -\frac{6EI}{h^2} & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{h} + \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & \frac{2EI}{h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{h^2} & 0 & -\frac{6EI}{h^2} & \frac{2EI}{h} & 0 & 0 & \frac{8EI}{h} + \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{2EI}{h} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{h^2} & 0 & -\frac{6EI}{h^2} & 0 & \frac{2EI}{h} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{h} + \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{2EI}{h} & 0 \\ \frac{6EI}{h^2} & 0 & -\frac{6EI}{h^2} & 0 & 0 & \frac{2EI}{h} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{h} + \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & \frac{2EI}{h} \\ 0 & \frac{6EI}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{h} & 0 & 0 & \frac{8EI}{h} + \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{h} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{h} + \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{6EI}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{h} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{h} + \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Y en forma de submatrices:

$$[K_I] = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 \\ K_2 & K_3 \end{bmatrix}$$

$$EI_{vigas} = 30674000$$

$$EI_{columnas} = 20940104.6$$

$$[K_0] = \begin{bmatrix} \frac{436.25}{EI_{vigas}} & -\frac{436.25}{EI_{vigas}} & 0 \\ -\frac{436.25}{EI_{vigas}} & \frac{872.50}{EI_{vigas}} & -\frac{436.25}{EI_{vigas}} \\ 0 & -\frac{436.25}{EI_{vigas}} & \frac{872.50}{EI_{vigas}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{4X} \\ U_{7X} \end{Bmatrix}$$

$$[K_1] = \begin{bmatrix} \frac{8725.04}{EI_{columnas}} & \frac{8725.04}{EI_{columnas}} & \frac{8725.04}{EI_{columnas}} & \frac{8725.04}{EI_{columnas}} & \frac{8725.04}{EI_{columnas}} & \frac{8725.04}{EI_{columnas}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8725.04}{EI_{columnas}} & -\frac{8725.04}{EI_{columnas}} & -\frac{8725.04}{EI_{columnas}} & 0 & 0 & 0 & \frac{8725.04}{EI_{columnas}} & \frac{8725.04}{EI_{columnas}} & \frac{8725.04}{EI_{columnas}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8725.04}{EI_{columnas}} & -\frac{8725.04}{EI_{columnas}} & -\frac{8725.04}{EI_{columnas}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1Z} \\ U_{4Z} \\ U_{7Z} \\ U_{1Z} \\ U_{4Z} \\ U_{7Z} \\ U_{1Z} \\ U_{4Z} \\ U_{7Z} \end{Bmatrix}$$



MATRIZ DE RIGIDEZ DE EFECTOS HORIZONTALES - HIPOTESIS DE DIAFRAGMA RÍGIDO.

$$[K_2] = \begin{bmatrix} U_{1X} & U_{4X} & U_{7X} \\ 8725.04 & -8725.04 & 0 \\ 8725.04 & -8725.04 & 0 \\ 8725.04 & -8725.04 & 0 \\ 8725.04 & 0 & -8725.04 \\ 8725.04 & 0 & -8725.04 \\ 8725.04 & 0 & -8725.04 \\ 0 & 8725.04 & 0 \\ 0 & 8725.04 & 0 \\ 0 & 8725.04 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1Z} \\ U_{2Z} \\ U_{3Z} \\ U_{4Z} \\ U_{5Z} \\ U_{6Z} \\ U_{7Z} \\ U_{8Z} \\ U_{9Z} \end{Bmatrix}$$

$$[K_3] = \begin{bmatrix} U_{1Z} & U_{2Z} & U_{3Z} & U_{4Z} & U_{5Z} & U_{6Z} & U_{7Z} & U_{8Z} & U_{9Z} \\ 1209236.82 & 255616.67 & 0 & 349001.74 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 255616.67 & 1720470.15 & 255616.67 & 0 & 349001.74 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 255616.67 & 1209236.82 & 0 & 0 & 349001.74 & 0 & 0 & 0 \\ 349001.74 & 0 & 0 & 1907240.30 & 255616.67 & 0 & 349001.74 & 0 & 0 \\ 0 & 349001.74 & 0 & 255616.67 & 2418473.64 & 255616.67 & 0 & 349001.74 & 0 \\ 0 & 0 & 349001.74 & 0 & 255616.67 & 1907240.30 & 0 & 0 & 349001.74 \\ 0 & 0 & 0 & 349001.74 & 0 & 0 & 1907240.30 & 255616.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 349001.74 & 0 & 255616.67 & 2418473.64 & 255616.67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 349001.74 & 0 & 255616.67 & 1907240.30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1Z} \\ U_{2Z} \\ U_{3Z} \\ U_{4Z} \\ U_{5Z} \\ U_{6Z} \\ U_{7Z} \\ U_{8Z} \\ U_{9Z} \end{Bmatrix}$$

Al realizar el método de condensación con la ecuación 3.19:

$$[K_c] = [K_0] - [K_1][K_3]^{-1}[K_2]$$

$$[K_c] = \begin{bmatrix} U_{1X} & U_{4X} & U_{7X} \\ 232.74 & -300.38 & 79.75 \\ -300.38 & 632.90 & -428.34 \\ 79.75 & -428.34 & 768.77 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{4X} \\ U_{7X} \end{Bmatrix}$$

Donde $[K_c]$ es la matriz de rigidez de efectos horizontales para el pórtico en estudio.



Se somete al pórtico a las siguientes acciones de fuerzas:

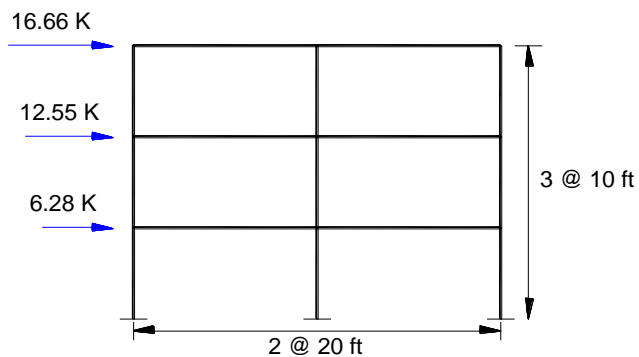


Figura 3.21 Fuerzas externas sobre el pórtico.

Se calcula:

$$\begin{Bmatrix} \frac{U_{1X}}{U_{4X}} \\ \frac{U_{7X}}{U_{7X}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 232.74 & -300.38 & 79.75 \\ -300.38 & 632.90 & -428.34 \\ 79.75 & -428.34 & 768.77 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 16.66 \\ 12.55 \\ 6.28 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4533 \\ 0.3350 \\ 0.1478 \end{Bmatrix} in$$

Comparación de resultados con ETABS v9.6.0

Nivel	M. Rigidez	ETABSv9.6.0	Discrepancia
3	0.4533	0.4533	0.00%
2	0.3350	0.3350	0.00%
1	0.1478	0.1478	0.00%

CAPITULO IV

IDEALIZACIÓN DE DIAFRAGMA RÍGIDO

4.1 INTRODUCCIÓN

Hasta el momento se han establecido los siguientes modelos matemáticos para el análisis de pórticos reticulares planos:

- 1- El modelo matemático general que plantea 3 grados de libertad por nodo.
- 2- El modelo matemático modificado que es incapaz de sufrir deformaciones axiales por parte de sus elementos, mediante los criterios de la sección 3.2.
- 3- El modelo matemático que está limitado al análisis de cargas horizontales, obtenido mediante los criterios de la sección 3.3.

Debido a que se necesita analizar la estructura como una unidad y no como sistemas independientes a la hora de resistir cargas horizontales, se introducirá la hipótesis de diafragma rígido a los pisos de la estructura.

4.2 HIPÓTESIS DE DIAFRAGMA RÍGIDO EN UN SISTEMA DE PISO

Diafragma rígido

Una losa de entrepiso de la estructura de una edificación, como es una losa maciza de espesor adecuado para longitudes que cubre, es mucho más rígida en su propio plano que transversalmente, como se muestra en la figura 4.1.

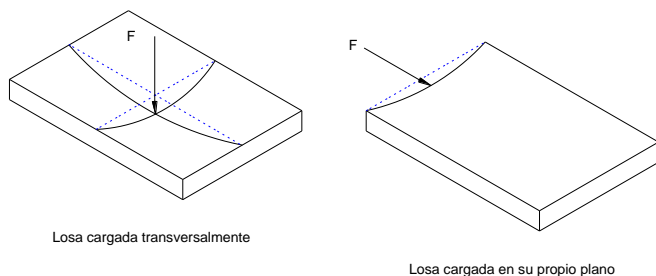


Figura 4.1 Deformaciones internas de una losa ante diferentes tipos de cargas.

Se puede pensar que se trata de un cuerpo infinitamente rígido para desplazamientos en su propio plano. Si esta aproximación se considera válida, siempre es posible describir la posición horizontal de cualquier punto dentro de la losa, o diafragma, a partir de dos desplazamientos horizontales ortogonales, x y y , y un giro alrededor de un eje perpendicular al plano del diafragma, z .

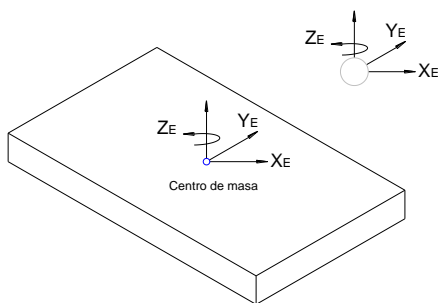


Figura 4.2 Diafragma como cuerpo infinitamente rígido en su propio plano.

En la figura 4.2 se hace la equivalencia entre los grados de libertad de un diafragma infinitamente rígido en su propio plano un cuerpo rígido propiamente dicho que tiene translaciones y giros en un plano horizontal.

Si el diafragma tiene un desplazamiento que incluya componentes de translación horizontal y una rotación alrededor de un eje vertical, estos desplazamientos siempre pueden ser expresados en función de tres variables x , y y z .

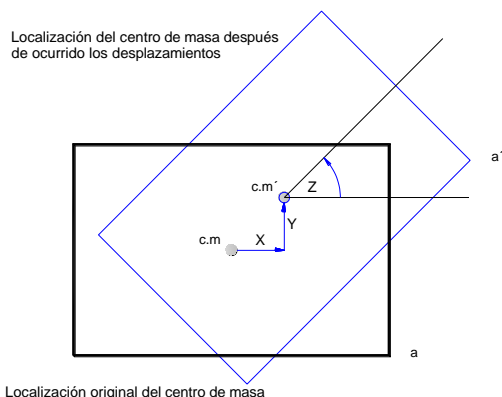


Figura 4.3 Desplazamientos expresados en función de X , Y y Z .

La idealización de diafragma infinitamente rígido en su propio plano solo hace referencia a los tres grados de libertad mencionados, por lo tanto los desplazamientos verticales, dirección en la cual el diafragma es definitivamente

flexible, son posibles. Igualmente las rotaciones alrededor de los ejes horizontales no hacen parte de la consideración de diafragma infinitamente rígido.

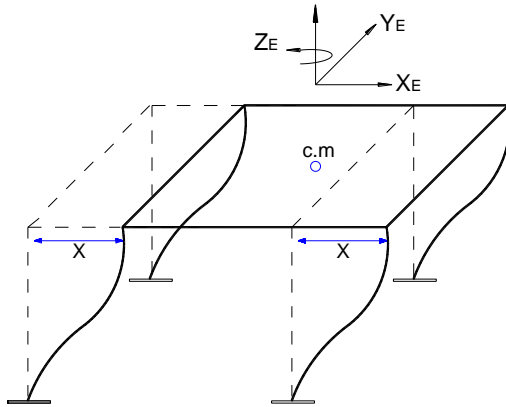


Figura 4.4 Deformaciones en los elementos de una estructura de un piso, con diafragma rígido en su propio plano, ante un desplazamiento en la dirección X.

La figura 4.4 presenta una estructura de un piso compuesta por cuatro pórticos localizados en cada uno de los cuatro bordes de la losa. Si se realiza una traslación en el sentido x, en la figura se puede ver que en la parte superior de las cuatro columnas, en el punto en que tocan la losa, tienen el mismo desplazamiento horizontal, lo cual es totalmente compatible con la hipótesis de diafragma rígido

Por lo tanto: **dos puntos cualesquiera, que formen parte de la losa de entrepiso la cual se supone como diafragma rígido, están inhabilitados para tener desplazamientos relativos que se pueda contener dentro del plano horizontal, por otro lado, pueden tener desplazamientos relativos en la dirección vertical y giros con respecto a cualquier eje horizontal.**

4.3 TRANSFORMACIÓN DE LOS GRADOS DE LIBERTAD

Se dispone de dos sistemas de coordenada, coordenadas locales al referirnos al elemento, coordenadas globales para el sistema estructural de análisis y su relación existente entre dichas coordenadas a través de la matriz de

transformación $[\lambda]$. Ahora se plantea el equilibrio entre las fuerzas que actúan en el pórtico en el piso y las resultantes en el centro de masa del diafragma para encontrar la relación existente, por lo que se introducirá un nuevo sistema de coordenadas para la estructura global, las cuales tendrán el subíndice **E**.

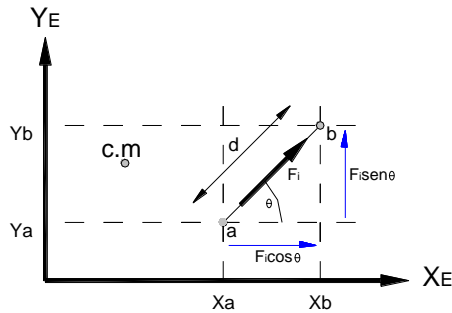


Figura 4.5 Componentes de la fuerza del pórtico en dirección arbitraria.

Los puntos **a** y **b** definen la dirección positiva de la fuerza, al ir de **a** a **b**. la única restricción en la localización de estos puntos en que debe estar en la línea de acción del pórtico. De la figura se establece:

$$d = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \quad \text{Ecuación 4.1}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{y_b - y_a}{d} \quad \text{Ecuación 4.2}$$

$$\text{cos}\theta = \frac{x_b - x_a}{d} \quad \text{Ecuación 4.3}$$

Mientras la fuerza F_i se mantenga en su línea de acción no importa la localización que tenga a lo largo de esta línea, por lo tanto arbitrariamente se coloca en el punto **a**.

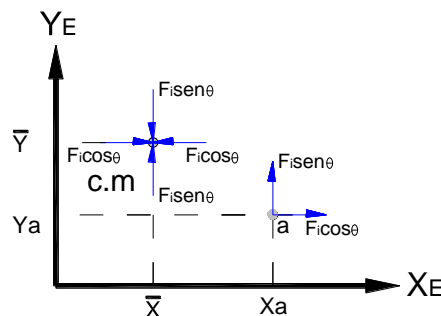


Figura 4.6 Componentes ortogonales del pórtico

Y según la figura 4.6 se puede concluir la transformación de coordenadas de grados de libertad de pórtico a grados de libertad de la estructura expresados en el centro de masa del diafragma, a través de la siguiente figura:

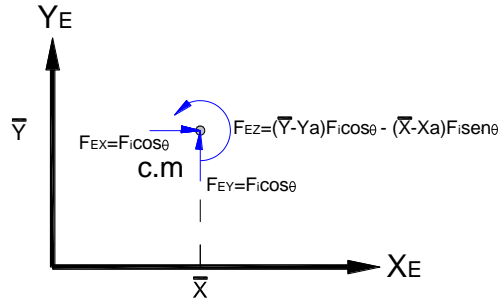


Figura 4.7 Grados de libertad en el centro de masa del diafragma i.

Con lo antes expuesto se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{Bmatrix} F_{Eix} \\ F_{Eiy} \\ F_{Eiz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ (\bar{Y}_i - y_a) \cos \theta - (\bar{X}_i - x_a) \sin \theta \end{Bmatrix} \{F_i\} \quad \text{Ecuación 4.4}$$

De donde:

$$\{F_{Ei}\} = [t_i] \{F_i\} \quad \text{Ecuación 4.5}$$

Y se define para cada piso:

$$r_i = (\bar{Y}_i - y_a) \cos \theta - (\bar{X}_i - x_a) \sin \theta \quad \text{Ecuación 4.6}$$

Por lo tanto al reescribir la ecuación 4.4 se tiene:

$$\begin{Bmatrix} F_{Eix} \\ F_{Eiy} \\ F_{Eiz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ r_i \end{Bmatrix} \{F_i\} \quad \text{Ecuación 4.7}$$

Y para toda la estructura será:

$$\{F_E\} = [T_p] \{F_p\} \quad \text{Ecuación 4.8}$$

Donde la matriz $[T_p]$ está compuesta por las siguientes submatrices de 3x1:

$$[T_p] = \begin{bmatrix} t_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{N-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 4.9



El tamaño de la matriz $[T_p]$ para cada pórtico tiene dimensiones **3N** filas por **N** columnas donde **N** es el número de pisos.

Para cada pórtico se tiene:

$$\{F_c\} = [K_c] \{U_c\} \quad \text{Ecuación 4.10}$$

Y

$$\{F_E\} = [T_p] \{F_c\} \quad \text{Ecuación 4.11}$$

Al aplicar el principio de contra gradiente se tiene:

$$\{U_c\} = [T_p]^T \{U_E\} \quad \text{Ecuación 4.12}$$

Al reemplazar la ecuación 4.12 en la ecuación 4.10:

$$\{F_c\} = [K_c] [T_p]^T \{U_E\} \quad \text{Ecuación 4.13}$$

Al reemplazar la ecuación 4.13 en la ecuación 4.11:

$$\{F_E\} = [T_p] [K_c] [T_p]^T \{U_E\} = [K_E] \{U_E\} \quad \text{Ecuación 4.14}$$

Donde $[K_E]$ corresponde a la matriz de rigidez del pórtico expresada en función de los grados de libertad de toda la estructura. Esta matriz tiene dimensiones de **3N x 3N**.

4.4 ENSAMBLE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE TODA LA ESTRUCTURA

La matriz de rigidez de toda la estructura $[K_E]_T$, es simplemente la suma de todas las matrices $[K_E]$, de todos los pórticos. Para un total de **q** pórticos:

$$[K_E]_T = \sum_{i=1}^q [K_E^i] \quad \text{Ecuación 4.15}$$

CAPITULO V

EJEMPLO

5.1 DESCRIPCIÓN DEL EDIFICIO EN ANÁLISIS

La estructura de 3 niveles de concreto reforzado posee las siguientes características idealizadas

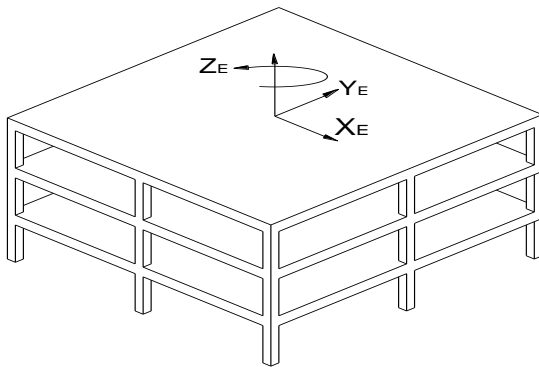


Figura 5.1 Edificio idealizado de tres niveles y dos crujiás y dos bahías en las direcciones respectivas.

Tres pórticos de 3 niveles y 2 crujiás en la dirección X_E y tres pórticos de 3 niveles y 2 bahías en la dirección Y_E .

La configuración en planta es mostrada en la siguiente figura:

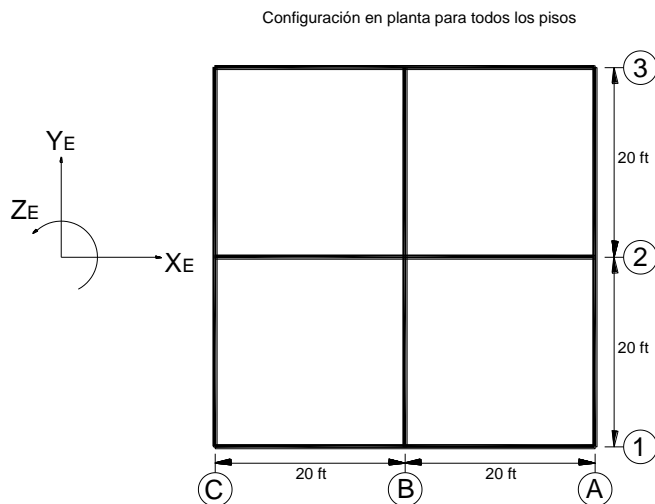


Figura 5.2 Planta estructural idealizada



Y la configuración en elevación es como sigue:

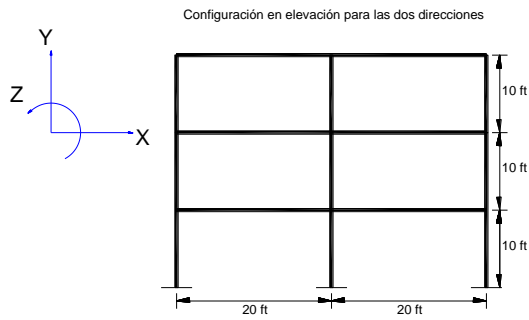


Figura 5.3 Elevación estructural idealizada.

Propiedades de los elementos:

vigas: 12" x 20" $I_v = 8000 \text{ in}^4$

$L = 20 \text{ ft}$

columnas: 16" x 16" $I_c = 5461.33 \text{ in}^4$

$h = 10 \text{ ft}$

concreto:

$w_c = 150 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$ $f'_c = 4000 \text{ psi}$

$E_c = \frac{33 \times w_c^{1.5} \times \sqrt{f'_c}}{1000} \text{ ksi} = 3834.25 \text{ ksi}$

ACI-318-08-8.5.1

Discretización del sistema planar:

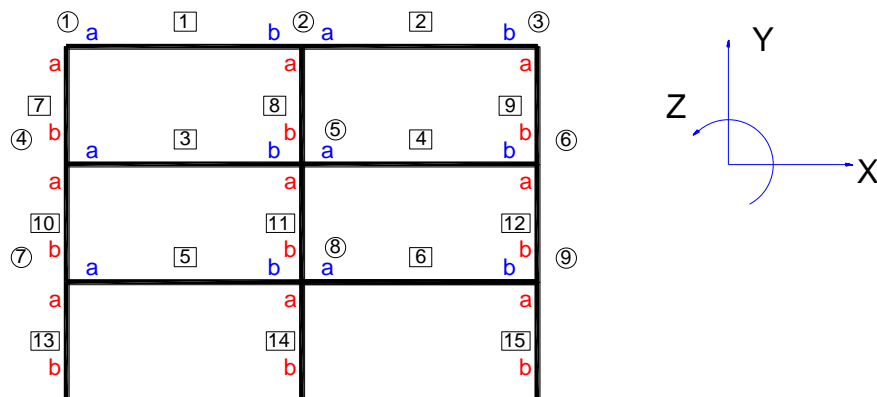


Figura 5.4 Pórtico discretizado para el análisis.



5.2 ESTRUCTURACIÓN

	U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9	
[K _p] =	K ₁₁	K ₁₂	K ₁₃	K ₁₄	K ₁₅	K ₁₆	K ₁₇	K ₁₈	K ₁₉	U1
	K ₂₁	K ₂₂	K ₂₃	K ₂₄	K ₂₅	K ₂₆	K ₂₇	K ₂₈	K ₂₉	U2
	K ₃₁	K ₃₂	K ₃₃	K ₃₄	K ₃₅	K ₃₆	K ₃₇	K ₃₈	K ₃₉	U3
	K ₄₁	K ₄₂	K ₄₃	K ₄₄	K ₄₅	K ₄₆	K ₄₇	K ₄₈	K ₄₉	U4
	K ₅₁	K ₅₂	K ₅₃	K ₅₄	K ₅₅	K ₅₆	K ₅₇	K ₅₈	K ₅₉	U5
	K ₆₁	K ₆₂	K ₆₃	K ₆₄	K ₆₅	K ₆₆	K ₆₇	K ₆₈	K ₆₉	U6
	K ₇₁	K ₇₂	K ₇₃	K ₇₄	K ₇₅	K ₇₆	K ₇₇	K ₇₈	K ₇₉	U7
	K ₈₁	K ₈₂	K ₈₃	K ₈₄	K ₈₅	K ₈₆	K ₈₇	K ₈₈	K ₈₉	U8
	K ₉₁	K ₉₂	K ₉₃	K ₉₄	K ₉₅	K ₉₆	K ₉₇	K ₉₈	K ₉₉	U9

5.3 VINCULACIÓN

Para la columna 1,2 y 3:

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= K_{aa}^{v1} + K_{aa}^{c7} & K_{12} &= K_{ab}^{v1} & K_{13} &= 0 \\
 K_{21} &= K_{ba}^{v1} & K_{22} &= K_{bb}^{v1} + K_{aa}^{v2} + K_{aa}^{c8} & K_{23} &= K_{ab}^{v2} \\
 K_{31} &= 0 & K_{32} &= K_{ba}^{v2} & K_{33} &= K_{bb}^{v2} + K_{aa}^{c9} \\
 K_{41} &= K_{ba}^{c7} & K_{42} &= 0 & K_{43} &= 0 \\
 K_{51} &= 0 & K_{52} &= K_{ba}^{c8} & K_{53} &= 0 \\
 K_{61} &= 0 & K_{62} &= 0 & K_{63} &= K_{ba}^{c9} \\
 K_{71} &= 0 & K_{72} &= 0 & K_{73} &= 0 \\
 K_{81} &= 0 & K_{82} &= 0 & K_{83} &= 0 \\
 K_{91} &= 0 & K_{92} &= 0 & K_{93} &= 0
 \end{aligned}$$

Para las columnas 4,5 y 6:

$$\begin{aligned}
 K_{14} &= K_{ab}^{c7} & K_{15} &= 0 & K_{16} &= 0 \\
 K_{24} &= 0 & K_{25} &= K_{ab}^{c8} & K_{26} &= 0 \\
 K_{34} &= 0 & K_{35} &= 0 & K_{36} &= K_{ab}^{c9} \\
 K_{44} &= K_{aa}^{v3} + K_{bb}^{c7} + K_{aa}^{c10} & K_{45} &= K_{ab}^{v3} & K_{46} &= 0 \\
 K_{54} &= K_{ba}^{v3} & K_{55} &= K_{bb}^{v3} + K_{aa}^{v4} + K_{bb}^{c8} + K_{aa}^{c11} & K_{56} &= K_{ab}^{v4} \\
 K_{64} &= 0 & K_{65} &= K_{ba}^{v4} & K_{66} &= K_{bb}^{v4} + K_{bb}^{c9} + K_{aa}^{c12} \\
 K_{74} &= K_{ba}^{c10} & K_{75} &= 0 & K_{76} &= 0 \\
 K_{84} &= 0 & K_{85} &= K_{ba}^{c11} & K_{86} &= 0 \\
 K_{94} &= 0 & K_{95} &= 0 & K_{96} &= K_{ba}^{c12}
 \end{aligned}$$



Para las columnas 7,8 y 9:

$$\begin{array}{llll}
 K_{17} = 0 & K_{18} = 0 & K_{19} = 0 \\
 K_{27} = 0 & K_{28} = 0 & K_{29} = 0 \\
 K_{37} = 0 & K_{38} = 0 & K_{39} = 0 \\
 K_{47} = K_{ab}^{c10} & K_{48} = 0 & K_{49} = 0 \\
 K_{57} = 0 & K_{58} = K_{ab}^{c11} & K_{59} = 0 \\
 K_{67} = 0 & K_{68} = 0 & K_{69} = K_{ab}^{c12} \\
 K_{77} = K_{aa}^{v5} + K_{bb}^{c10} + K_{aa}^{c13} & K_{78} = K_{ab}^{v5} & K_{79} = 0 \\
 K_{87} = K_{ba}^{v5} & K_{88} = K_{bb}^{v5} + K_{aa}^{v6} + K_{bb}^{c11} + K_{aa}^{c14} & K_{89} = K_{ab}^{v6} \\
 K_{97} = 0 & K_{98} = K_{ba}^{v6} & K_{99} = K_{bb}^{v6} + K_{bb}^{c12} + K_{aa}^{c15}
 \end{array}$$

Matriz del elemento viga en coordenadas globales

$$L=240 \text{ in} \quad A=240 \text{ in}^2$$

$$I=8000 \text{ in}^4 \quad E=3834.25 \frac{\text{k}}{\text{in}^2}$$

$$[K^v] = \begin{bmatrix}
 \overset{U_{aX}}{3834.250} & \overset{U_{aY}}{0} & \overset{U_{aZ}}{0} & \overset{U_{bX}}{-3834.250} & \overset{U_{bY}}{0} & \overset{U_{bZ}}{0} \\
 0 & 26.627 & 3195.208 & 0 & -26.627 & 3195.208 \\
 0 & 3195.208 & 511233.333 & 0 & -3195.208 & 255616.667 \\
 -3834.250 & 0 & 0 & 3834.250 & 0 & 0 \\
 0 & -26.627 & -3195.208 & 0 & 26.627 & -3195.208 \\
 0 & 3195.208 & 255616.667 & 0 & -3195.208 & 511233.333
 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{aX} \\ U_{aY} \\ U_{aZ} \\ U_{bX} \\ U_{bY} \\ U_{bZ} \end{matrix}$$

Matriz del elemento columna en coordenadas globales

$$h=120 \text{ in} \quad A=256 \text{ in}^2$$

$$I=5461.33 \text{ in}^4 \quad E=3834.25 \frac{\text{k}}{\text{in}^2}$$

$$[K^c] = \begin{bmatrix}
 \overset{U_{aX}}{145.417} & \overset{U_{aY}}{0} & \overset{U_{aZ}}{8725.044} & \overset{U_{bX}}{-145.417} & \overset{U_{bY}}{0} & \overset{U_{bZ}}{8725.044} \\
 0 & 8179.733 & 0 & 0 & -8179.733 & 0 \\
 8725.044 & 0 & 698003.485 & -8725.044 & 0 & 349001.743 \\
 -145.417 & 0 & -8725.044 & 145.417 & 0 & -8725.044 \\
 0 & -8179.733 & 0 & 0 & 8179.733 & 0 \\
 8725.044 & 0 & 349001.743 & -8725.044 & 0 & 698003.485
 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{aX} \\ U_{aY} \\ U_{aZ} \\ U_{bX} \\ U_{bY} \\ U_{bZ} \end{matrix}$$



MATRIZ DE RIGIDEZ DE EFECTOS HORIZONTALES - HIPOTESIS DE DIAFRAGMA RÍGIDO.

5.4 CONCATENACION

[K_p] =

$K_{aa}^{v1}+K_{aa}^{c7}$	K_{ab}^{v1}	0	K_{ab}^{c7}	0	0	0	0	0
K_{ba}^{v1}	$K_{bb}^{v1}+K_{aa}^{v2}+K_{aa}^{c8}$	K_{ab}^{v2}	0	K_{ab}^{c8}	0	0	0	0
0	K_{ba}^{v2}	$K_{bb}^{v2}+K_{aa}^{c9}$	0	0	K_{ab}^{c9}	0	0	0
K_{ba}^{c7}	0	0	$K_{aa}^{v3}+K_{bb}^{c7}+K_{aa}^{c10}$	K_{ab}^{v3}	0	K_{ab}^{c10}	0	0
0	K_{ba}^{c8}	0	K_{ba}^{v3}	$K_{bb}^{v3}+K_{aa}^{v4}+K_{bb}^{c8}+K_{aa}^{c11}$	K_{ab}^{v4}	0	K_{ab}^{c11}	0
0	0	K_{ba}^{c9}	0	K_{ba}^{v4}	$K_{bb}^{v4}+K_{bb}^{c9}+K_{aa}^{c12}$	0	0	K_{ab}^{c12}
0	0	0	K_{ba}^{c10}	0	0	$K_{aa}^{v5}+K_{bb}^{c10}+K_{aa}^{c13}$	K_{ab}^{v5}	0
0	0	0	0	K_{ba}^{c11}	0	K_{ba}^{v5}	$K_{bb}^{v5}+K_{aa}^{v6}+K_{bb}^{c11}+K_{aa}^{c14}$	K_{ab}^{v6}
0	0	0	0	0	K_{ba}^{c12}	0	K_{ba}^{v6}	$K_{bb}^{v6}+K_{bb}^{c12}+K_{aa}^{c15}$

Matriz de rigidez del pórtico

[K_p] =

U1X	U1Y	U1Z	U2X	U2Y	U2Z	U3X	U3Y	U3Z	U4X	U4Y	U4Z	U5X	U5Y	U5Z	U6X	U6Y	U6Z	U7X	U7Y	U7Z	U8X	U8Y	U8Z	U9X	U9Y	U9Z	U1X
3979.6674	0.0000	8725.0436	-3834.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-145.4174	0.0000	8725.0436	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	U1Y
0.0000	8206.3601	3195.2083	0.0000	-26.6267	3195.2083	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-8179.7333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	U1Z
8725.0436	3195.2083	1209236.8184	0.0000	-3195.2083	255616.6667	0.0000	0.0000	0.0000	-8725.0436	0.0000	349001.7425	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	U2X
-3834.2500	0.0000	0.0000	7813.9174	0.0000	8725.0436	-3834.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-145.4174	0.0000	8725.0436	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	U2Y
0.0000	-26.6267	-3195.2083	0.0000	8232.9868	0.0000	0.0000	-26.6267	3195.2083	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-8179.7333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	U2Z
0.0000	3195.2083	255616.6667	8725.0436	0.0000	1720470.1518	0.0000	-3195.2083	255616.6667	0.0000	0.0000	0.0000	-8725.0436	0.0000	349001.7425	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	U3X
0.0000	0.0000	0.0000	-3834.2500	0.0000	0.0000	3979.6674	0.0000	8725.0436	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-145.4174	0.0000	8725.0436	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	U3Y
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-26.6267	-3195.2083	0.0000	8206.3601	-3195.2083	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-8179.7333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	U3Z
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3195.2083	255616.6667	8725.0436	-3195.2083	1209236.8184	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-8725.0436	0.0000	349001.7425	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	U4X
-145.4174	0.0000	-8725.0436	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	4125.0848	0.0000	0.0000	-3834.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-145.4174	0.0000	8725.0436	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	U4Y
0.0000	-8179.7333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	16386.0934	3195.2083	0.0000	-26.6267	3195.2083	0.0000	0.0000	0.0000	-8179.7333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	U4Z
8725.0436	0.0000	349001.7425	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3195.2083	1907240.3035	0.0000	-3195.2083	255616.6667	0.0000	0.0000	0.0000	-8725.0436	0.0000	349001.7425	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	U5X
0.0000	0.0000	0.0000	-145.4174	0.0000	-8725.0436	0.0000	0.0000	0.0000	-3834.2500	0.0000	0.0000	7959.3348	0.0000	0.0000	-3834.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-145.4174	0.0000	8725.0436	0.0000	0.0000	0.0000	U5Y
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-8179.7333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-26.6267	-3195.2083	0.0000	16412.7201	0.0000	0.0000	-26.6267	3195.2083	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-8179.7333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	U5Z
0.0000	0.0000	0.0000	8725.0436	0.0000	349001.7425	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2418473.6368	0.0000	-3195.2083	255616.6667	0.0000	0.0000	0.0000	-8725.0436	0.0000	349001.7425	0.0000	0.0000	0.0000	U6X
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-145.4174	0.0000	-8725.0436	0.0000	0.0000	0.0000	-3834.2500	0.0000	0.0000	4125.0848	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-145.4174	0.0000	8725.0436	U6Y
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-8179.7333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-26.6267	-3195.2083	0.0000	16386.0934	-3195.2083	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	U6Z
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	8725.0436	0.0000	349001.7425	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3195.2083	255616.6667	0.0000	-3195.2083	1907240.3035	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-8725.0436	0.0000	349001.7425	U7X
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-145.4174	0.0000	-8725.0436	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	4125.0848	0.0000	0.0000	-3834.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	U7Y
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-8179.7333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	16386.0934	3195.2083	0.0000	-26.6267	3195.2083	0.0000	0.0000	0.0000	U7Z
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	8725.0436	0.0000	349001.7425	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3195.2083	1907240.3035	0.0000	-3195.2083	255616.6667	0.0000	0.0000	0.0000	U8X
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-145.4174	0.0000	-8725.0436	0.0000	0.0000	0.0000	-3834.2500	0.0000	0.0000	7959.3348	0.0000	0.0000	-3834.2500	0.0000	0.0000	U8Y
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-26.6267	-3195.2083	0.0000	16412.7201	0.0000	0.0000	0.0000	-26.6267	3195.2083	U8Z
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	8725.0436	0.0000	349001.7425	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3195.2083	255616.6667	0.0000	0.0000	2418473.6368	0.0000	-3195.2083	255616.6667	U9X
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-145.4174	0.0000	-8725.0436	0.0000	0.0000	0.0000	-3834.2500	0.0000	0.0000	4125.0848	0.0000	0.0000	U9Y
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-26.6267	-3195.2083	0.0000	16386.0934	-3195.2083	0.0000	U9Z
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	8725.0436	0.0000	349001.7425	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3195.2083	255616.6667	0.0000	-3195.2083	1907240.3035	



5.5 MATRIZ DE RIGIDEZ DE EFECTOS HORIZONTALES DE LOS PÓRTICOS

Verificar si se pueden despreciar las deformaciones axiales en los elementos

Columnas:

$$\frac{H}{B} = \frac{30}{40} = 0.75 < 5$$

Por lo tanto si pueden despreciarse las deformaciones axiales en las columnas

Vigas: para todos los entrepisos

$$\sum \frac{I_v}{L} = \frac{8000}{240} \frac{\text{in}^4}{\text{in}} + \frac{8000}{240} \frac{\text{in}^4}{\text{in}} = 66.667 \text{ in}^3$$

$$\sum \frac{I_c}{h} = \frac{5461.33}{120} \frac{\text{in}^4}{\text{in}} + \frac{5461.33}{120} \frac{\text{in}^4}{\text{in}} + \frac{5461.33}{120} \frac{\text{in}^4}{\text{in}} = 136.533 \text{ in}^3$$

$$\beta = \frac{66.667 \text{ in}^3}{136.53 \text{ in}^3} = 0.488 > 0.35$$

Por lo tanto si pueden despreciarse las deformaciones axiales en las vigas.

Las ecuaciones de ligadura son las siguientes:

		4 – $U_{1Y} = 0$
		5 – $U_{2Y} = 0$
		6 – $U_{3Y} = 0$
1 – $U_{1X} = U_{2X} = U_{3X}$		7 – $U_{4Y} = 0$
Vigas 2 – $U_{4X} = U_{5X} = U_{6X}$	Columnas	8 – $U_{5Y} = 0$
3 – $U_{7X} = U_{8X} = U_{9X}$		9 – $U_{6Y} = 0$
		10 – $U_{7Y} = 0$
		11 – $U_{8Y} = 0$
		12 – $U_{9Y} = 0$



La matriz [R] es igual:

$$[R] = \begin{bmatrix} [I] \\ [R_0] \end{bmatrix}$$

[R] =

U1x	U4x	U7x	U1z	U2z	U3z	U4z	U5z	U6z	U7z	U8z	U9z	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U1x
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U4x
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U7x
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	U1z
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	U2z
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	U3z
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	U4z
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	U5z
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	U6z
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	U7z
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	U8z
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	U9z
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U2x
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U3x
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U5x
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U6x
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U8x
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U9x
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U1y
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U2y
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U3y
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U4y
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U5y
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U6y
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U7y
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U8y
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U9y



MATRIZ DE RIGIDEZ DE EFECTOS HORIZONTALES - HIPOTESIS DE DIAFRAGMA RÍGIDO.

Y la matriz de rigidez re-ordenada según grados de libertad **independientes** y grados de libertad **dependientes** es:

[K_p] =

	U1x	U4x	U7x	U1z	U2z	U3z	U4z	U5z	U6z	U7z	U8z	U9z	U2x	U3x	U5x	U6x	U8x	U9x	U1y	U2y	U3y	U4y	U5y	U6y	U7y	U8y	U9y		
	3979.667	-145.417	0.000	8725.044	0.000	0.000	8725.044	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-3834.250	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	U1x	
	-145.417	4125.085	-145.417	-8725.044	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	8725.044	0.000	0.000	0.000	0.000	-3834.250	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	U4x
	0.000	-145.417	4125.085	0.000	0.000	0.000	-8725.044	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-3834.250	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	U7x
	8725.044	-8725.044	0.000	1209236.818	255616.667	0.000	349001.743	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	3195.208	-3195.208	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	U1z
	0.000	0.000	0.000	255616.667	1720470.152	255616.667	0.000	349001.743	0.000	0.000	0.000	0.000	8725.044	0.000	-8725.044	0.000	0.000	0.000	3195.208	0.000	-3195.208	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	U2z
	0.000	0.000	0.000	0.000	255616.667	1209236.818	0.000	0.000	349001.743	0.000	0.000	0.000	0.000	8725.044	0.000	-8725.044	0.000	0.000	0.000	3195.208	-3195.208	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	U3z
	8725.044	0.000	-8725.044	349001.743	0.000	0.000	1907240.304	255616.667	0.000	0.000	349001.743	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	3195.208	-3195.208	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	U4z
	0.000	0.000	0.000	0.000	349001.743	0.000	255616.667	2418473.637	255616.667	0.000	349001.743	0.000	8725.044	0.000	0.000	0.000	-8725.044	0.000	0.000	0.000	0.000	3195.208	0.000	-3195.208	0.000	0.000	0.000	0.000	U5z
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	349001.743	0.000	255616.667	1907240.304	0.000	0.000	349001.743	0.000	8725.044	0.000	0.000	0.000	-8725.044	0.000	0.000	0.000	0.000	3195.208	-3195.208	0.000	0.000	0.000	0.000	U6z
	0.000	8725.044	0.000	0.000	0.000	349001.743	0.000	0.000	1907240.304	255616.667	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	3195.208	-3195.208	0.000	0.000	0.000	U7z
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	349001.743	0.000	255616.667	2418473.637	255616.667	0.000	0.000	0.000	8725.044	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	3195.208	0.000	-3195.208	0.000	0.000	U8z
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	349001.743	0.000	255616.667	1907240.304	0.000	0.000	0.000	8725.044	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	3195.208	-3195.208	0.000	0.000	U9z
	-3834.250	0.000	0.000	0.000	8725.044	0.000	0.000	8725.044	0.000	0.000	0.000	0.000	7813.917	-3834.250	-145.417	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	U2x
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	8725.044	0.000	0.000	8725.044	0.000	0.000	0.000	-3834.250	3979.667	0.000	-145.417	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	U3x
	0.000	-3834.250	0.000	0.000	-8725.044	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	8725.044	0.000	-145.417	0.000	7959.335	-3834.250	-145.417	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	U5x
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-8725.044	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	8725.044	0.000	-145.417	-3834.250	4125.085	0.000	-145.417	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	U6x
	0.000	0.000	-3834.250	0.000	0.000	0.000	0.000	-8725.044	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-145.417	0.000	7959.335	-3834.250	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	U8x
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-8725.044	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-145.417	-3834.250	4125.085	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	U9x
	0.000	0.000	0.000	3195.208	3195.208	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	8206.360	-26.627	0.000	-8179.733	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	U1y
	0.000	0.000	0.000	-3195.208	0.000	3195.208	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-26.627	8232.987	-26.627	0.000	-8179.733	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	U2y
	0.000	0.000	0.000	0.000	-3195.208	-3195.208	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-26.627	8206.360	0.000	0.000	-8179.733	0.000	0.000	0.000	0.000	U3y
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	3195.208	3195.208	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-8179.733	0.000	0.000	16386.093	-26.627	0.000	-8179.733	0.000	0.000	0.000	U4y
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-3195.208	0.000	3195.208	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-8179.733	0.000	0.000	16412.720	-26.627	0.000	-8179.733	0.000	0.000	U5y
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-3195.208	-3195.208	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-8179.733	0.000	-26.627	16386.093	0.000	0.000	-8179.733	0.000	U6y
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	3195.208	3195.208	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	16386.093	-26.627	0.000	0.000	U7y
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-3195.208	0.000	3195.208	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-8179.733	0.000	-26.627	16412.720	-26.627	0.000	U8y
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-3195.208	-3195.208	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-8179.733	0.000	-26.627	16386.093	0.000	0.000	U9y

El modelo matemático incapaz de sufrir deformaciones axiales según la **ecuación 3.12** es:

$[K_I] = [R]^T [K_P] [R]$

[K_I] =

U _{1X}	U _{4X}	U _{7X}	U _{1Z}	U _{2Z}	U _{3Z}	U _{4Z}	U _{5Z}	U _{6Z}	U _{7Z}	U _{8Z}	U _{9Z}	
436.25	-436.25	0	8725.04	8725.04	8725.04	8725.04	8725.04	8725.04	0	0	0	U _{1X}
-436.25	872.50	-436.25	-8725.04	-8725.04	-8725.04	0	0	0	8725.04	8725.04	8725.04	U _{4X}
0	-436.25	872.50	0	0	0	-8725.04	-8725.04	-8725.04	0	0	0	U _{7X}
8725.04	-8725.04	0	1209236.82	255616.67	0	349001.74	0	0	0	0	0	U _{1Z}
8725.04	-8725.04	0	255616.67	1720470.15	255616.67	0	349001.74	0	0	0	0	U _{2Z}
8725.04	-8725.04	0	0	255616.67	1209236.82	0	0	349001.74	0	0	0	U _{3Z}
8725.04	0	-8725.04	349001.74	0	0	1907240.30	255616.67	0	349001.74	0	0	U _{4Z}
8725.04	0	-8725.04	0	349001.74	0	255616.67	2418473.64	255616.67	0	349001.74	0	U _{5Z}
8725.04	0	-8725.04	0	0	349001.74	0	255616.67	1907240.30	0	0	0	U _{6Z}
0	8725.04	0	0	0	0	349001.74	0	0	1907240.30	255616.67	0	U _{7Z}
0	8725.04	0	0	0	0	0	349001.74	0	255616.67	2418473.64	255616.67	U _{8Z}
0	8725.04	0	0	0	0	0	0	349001.74	0	255616.67	1907240.30	U _{9Z}



Y al condensar los grados de libertad rotacionales según la **ecuación 3.22** se tiene el modelo matemático limitado al uso de fuerzas horizontales como:

$$[K_c] = [K_0] - [K_1][K_3]^{-1}[K_2] = \begin{bmatrix} \overset{U_{1x}}{232.74} & \overset{U_{4x}}{-300.38} & \overset{U_{7x}}{79.75} \\ -300.38 & 632.90 & -428.34 \\ 79.75 & -428.34 & 768.77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1x} \\ U_{4x} \\ U_{7x} \end{bmatrix}$$

5.6 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

Transformación de coordenadas de pórtico a coordenadas de toda la estructura

La configuración en planta es:

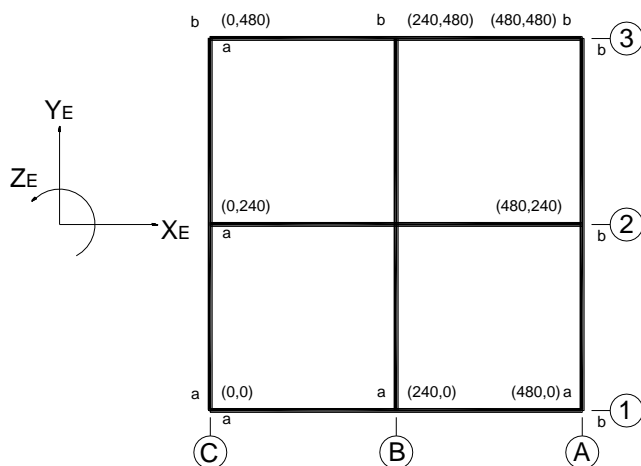


Figura 5.5 Coordenadas inicial y final para cada pórtico.

Para cada pórtico se definen dos puntos **a** y **b** los cuales corresponden a extremos del pórtico. Con las coordenadas de los dos puntos se calcula **d** de acuerdo con la ecuación (4.1), y con este valor se calcula **senα** y **cosa** y con las coordenadas de los centros de masa en cada piso en valor de **r**.



Las coordenadas de los centros de masa de cada piso son:

piso 1	piso 2	techo
$\bar{X}_1 = 240 \text{ in}$	$\bar{X}_2 = 240 \text{ in}$	$\bar{X}_3 = 240 \text{ in}$
$\bar{Y}_1 = 240 \text{ in}$	$\bar{Y}_2 = 240 \text{ in}$	$\bar{Y}_3 = 240 \text{ in}$

Los siguientes datos para encontrar cada una de las matrices de transformación de un grado de libertad por piso, a tres grados de libertad por piso, de acuerdo con los grados de libertad de los diafragmas son tabulados de la siguiente manera:

Eje	Tipo	xa	ya	xb	yb	d	α	cosa	sen α	r3	r2	r1
1	1	0	0	480	0	480	0	1	0	240	240	240
2	1	0	240	480	240	480	0	1	0	0	0	0
3	1	0	480	480	480	480	0	1	0	-240	-240	-240
A	2	480	0	480	480	480	90	0	1	240	240	240
B	2	240	0	240	480	480	90	0	1	0	0	0
C	2	0	0	0	480	480	90	0	1	-240	-240	-240

Tabla 5.1 Datos para cada pórtico en cada dirección.

Matrices de transformación:

De acuerdo a la ecuación (4.6) y (4.7)

TP1=	1	0	0
	0	0	0
	240	0	0
	0	1	0
	0	0	0
	0	240	0
	0	0	1
	0	0	0
	0	0	240

TP2=	1	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	0	1	0
	0	0	0
	0	0	0
	0	0	1
	0	0	0
	0	0	0

TP3=	1	0	0
	0	0	0
	-240	0	0
	0	1	0
	0	0	0
	0	-240	0
	0	0	1
	0	0	0
	0	0	-240

TPA=	0	0	0
1	0	0	
240	0	0	
0	0	0	
0	1	0	
0	240	0	
0	0	0	
0	0	1	
0	0	240	
TPB=	0	0	0
1	0	0	
0	0	0	
0	0	0	
0	0	0	
0	1	0	
0	0	0	
0	0	0	
0	0	0	
TPC=	0	0	0
1	0	0	
-240	0	0	
0	0	0	
0	1	0	
0	-240	0	
0	0	0	
0	0	1	
0	0	-240	



Ahora para cada pórtico se utiliza la ecuación (4.14) la cual muestra:

$$[T_p][K_c][T_p]^T = [K_E]$$

Para todos los pórticos la matriz de efectos horizontales, $[K_c]$ es:

$$[K_c] = \begin{bmatrix} 232.74 & -300.38 & 79.75 \\ -300.38 & 632.90 & -428.34 \\ 79.75 & -428.34 & 768.77 \end{bmatrix}$$

Para el pórtico en el eje 1:

$$[K_E^{P1}] = [T_1][K_c][T_1]^T$$

U3EX	U3EY	U3EZ	U2EX	U2EY	U2EZ	U1EX	U1EY	U1EZ	
232.74	0.00	55858.08	-300.38	0.00	-72091.70	79.75	0.00	19141.17	U3EX
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U3EY
55858.08	0.00	13405939.85	-72091.70	0.00	-17302007.37	19141.17	0.00	4593881.45	U3EZ
-300.38	0.00	-72091.70	632.90	0.00	151896.53	-428.34	0.00	-102802.57	U2EX
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U2EY
-72091.70	0.00	-17302007.37	151896.53	0.00	36455166.06	-102802.57	0.00	-24672615.79	U2EZ
79.75	0.00	19141.17	-428.34	0.00	-102802.57	768.77	0.00	184505.41	U1EX
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U1EY
19141.17	0.00	4593881.45	-102802.57	0.00	-24672615.79	184505.41	0.00	44281297.96	U1EZ

Para el pórtico en el eje 2:

$$[K_E^{P2}] = [T_2][K_c][T_2]^T$$

U3EX	U3EY	U3EZ	U2EX	U2EY	U2EZ	U1EX	U1EY	U1EZ	
232.74	0.00	0.00	-300.38	0.00	0.00	79.75	0.00	0.00	U3EX
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U3EY
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U3EZ
-300.38	0.00	0.00	632.90	0.00	0.00	-428.34	0.00	0.00	U2EX
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U2EY
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U2EZ
79.75	0.00	0.00	-428.34	0.00	0.00	768.77	0.00	0.00	U1EX
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U1EY
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U1EZ



Para el pórtico en el eje 3:

$$[K_E^{P3}] = [T_3][K_C][T_3]^T$$

U3EX	U3EY	U3EZ	U2EX	U2EY	U2EZ	U1EX	U1EY	U1EZ	
232.74	0.00	-55858.08	-300.38	0.00	72091.70	79.75	0.00	-19141.17	U3EX
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U3EY
-55858.08	0.00	13405939.85	72091.70	0.00	-17302007.37	-19141.17	0.00	4593881.45	U3EZ
-300.38	0.00	72091.70	632.90	0.00	-151896.53	-428.34	0.00	102802.57	U2EX
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U2EY
72091.70	0.00	-17302007.37	-151896.53	0.00	36455166.06	102802.57	0.00	-24672615.79	U2EZ
79.75	0.00	-19141.17	-428.34	0.00	102802.57	768.77	0.00	-184505.41	U1EX
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U1EY
-19141.17	0.00	4593881.45	102802.57	0.00	-24672615.79	-184505.41	0.00	44281297.96	U1EZ

Para el pórtico en el eje A:

$$[K_E^{PA}] = [T_A][K_C][T_A]^T$$

U3EX	U3EY	U3EZ	U2EX	U2EY	U2EZ	U1EX	U1EY	U1EZ	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U3EX
0.00	232.74	55858.08	0.00	-300.38	-72091.70	0.00	79.75	19141.17	U3EY
0.00	55858.08	13405939.85	0.00	-72091.70	-17302007.37	0.00	19141.17	4593881.45	U3EZ
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U2EX
0.00	-300.38	-72091.70	0.00	632.90	151896.53	0.00	-428.34	-102802.57	U2EY
0.00	-72091.70	-17302007.37	0.00	151896.53	36455166.06	0.00	-102802.57	-24672615.79	U2EZ
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U1EX
0.00	79.75	19141.17	0.00	-428.34	-102802.57	0.00	768.77	184505.41	U1EY
0.00	19141.17	4593881.45	0.00	-102802.57	-24672615.79	0.00	184505.41	44281297.96	U1EZ

Para el pórtico en el eje B:

$$[K_E^{PB}] = [T_B][K_C][T_B]^T$$

U3EX	U3EY	U3EZ	U2EX	U2EY	U2EZ	U1EX	U1EY	U1EZ	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U3EX
0.00	232.74	0.00	0.00	-300.38	0.00	0.00	79.75	0.00	U3EY
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U3EZ
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U2EX
0.00	-300.38	0.00	0.00	632.90	0.00	0.00	-428.34	0.00	U2EY
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U2EZ
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U1EX
0.00	79.75	0.00	0.00	-428.34	0.00	0.00	768.77	0.00	U1EY
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U1EZ



Para el pórtico en el eje C:

$$[K_E^{PC}] = [T_C][K_C][T_C]^T$$

U3EX	U3EY	U3EZ	U2EX	U2EY	U2EZ	U1EX	U1EY	U1EZ	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U3EX
0.00	232.74	-55858.08	0.00	-300.38	72091.70	0.00	79.75	-19141.17	U3EY
0.00	-55858.08	13405939.85	0.00	72091.70	-17302007.37	0.00	-19141.17	4593881.45	U3EZ
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U2EX
0.00	-300.38	72091.70	0.00	632.90	-151896.53	0.00	-428.34	102802.57	U2EY
0.00	72091.70	-17302007.37	0.00	-151896.53	36455166.06	0.00	102802.57	-24672615.79	U2EZ
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	U1EX
0.00	79.75	-19141.17	0.00	-428.34	102802.57	0.00	768.77	-184505.41	U1EY
0.00	-19141.17	4593881.45	0.00	102802.57	-24672615.79	0.00	-184505.41	44281297.96	U1EZ

5.7 MATRIZ DE RIGIDEZ DE EFECTOS HORIZONTALES DEL EDIFICIO

Y la matriz de rigidez de toda la estructura es según la ecuación (4.13)

$$[K_E]_T = \sum_{i=1}^q [K_E^i]$$

$$[K_E]_T = [K_E^{P1}] + [K_E^{P2}] + [K_E^{P3}] + [K_E^{PA}] + [K_E^{PB}] + [K_E^{PC}]$$

	U3EX	U3EY	U3EZ	U2EX	U2EY	U2EZ	U1EX	U1EY	U1EZ	
U3EX	698.23	0.00	0.00	-901.15	0.00	0.00	239.26	0.00	0.00	U3EX
U3EY	0.00	698.23	0.00	0.00	-901.15	0.00	0.00	239.26	0.00	U3EY
U3EZ	0.00	0.00	53623759.39	0.00	0.00	-69208029.48	0.00	0.00	18375525.78	U3EZ
U2EX	-901.15	0.00	0.00	1898.71	0.00	0.00	-1285.03	0.00	0.00	U2EX
U2EY	0.00	-901.15	0.00	0.00	1898.71	0.00	0.00	-1285.03	0.00	U2EY
U2EZ	0.00	0.00	-69208029.48	0.00	0.00	145820664.24	0.00	0.00	-98690463.18	U2EZ
U1EX	239.26	0.00	0.00	-1285.03	0.00	0.00	2306.32	0.00	0.00	U1EX
U1EY	0.00	239.26	0.00	0.00	-1285.03	0.00	0.00	2306.32	0.00	U1EY
U1EZ	0.00	0.00	18375525.78	0.00	0.00	-98690463.18	0.00	0.00	177125191.82	U1EZ



5.8 CENTRO DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

Calculo del Centro de Rigidez de la estructura por medio de la matriz de rigidez horizontal de cada pórtico

La matriz de rigidez de cada pórtico en cada eje es:

$$[K_C]_{1-2-3-A-B-C} = \begin{matrix} & \begin{matrix} U_{1X} & U_{4X} & U_{7X} \end{matrix} \\ \begin{matrix} U_{1X} \\ U_{4X} \\ U_{7X} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 232.74 & -300.38 & 79.75 \\ -300.38 & 632.90 & -428.34 \\ 79.75 & -428.34 & 768.77 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Por medio de la figura 5.5 se establece

La matriz de rigidez total en la dirección X_E es:

$$[K_{EX}]_T = [K_C]_1 + [K_C]_2 + [K_C]_3$$

La matriz de rigidez total en la dirección Y_E es:

$$[K_{EY}]_T = [K_C]_A + [K_C]_B + [K_C]_C$$

Las coordenadas del centro de rigidez (X_{ER} , Y_{ER}) son:

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{X_{3ER}}{X_{2ER}} \\ \frac{X_{2ER}}{X_{1ER}} \end{matrix} \right\} = \frac{240[K_C]_B + 480[K_C]_A}{[K_{EX}]_T} = \left\{ \begin{matrix} \frac{240}{240} \\ \frac{240}{240} \end{matrix} \right\} in \quad \left\{ \begin{matrix} \frac{Y_{3ER}}{Y_{2ER}} \\ \frac{Y_{2ER}}{Y_{1ER}} \end{matrix} \right\} = \frac{240[K_C]_2 + 480[K_C]_3}{[K_{EY}]_T} = \left\{ \begin{matrix} \frac{240}{240} \\ \frac{240}{240} \end{matrix} \right\} in$$

Como se ha demostrado que los centros de masa y rigidez coinciden, solo se hace necesario incluir la excentricidad accidental para calcular el momento de torsión en cada nivel de la estructura.

Por lo tanto el vector de fuerzas sobre la estructura tendrá la siguiente forma:

$$\begin{matrix} \text{Tercer nivel} & \text{Segundo nivel} & \text{Primer nivel} \\ \left\{ \begin{matrix} F_{3EX} \\ F_{3EY} \\ \pm e_{acc.3} (F_{3EX} + F_{3EY}) \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} F_{2EX} \\ F_{2EY} \\ \pm e_{acc.2} (F_{2EX} + F_{2EY}) \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} F_{1EX} \\ F_{1EY} \\ \pm e_{acc.1} (F_{1EX} + F_{1EY}) \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

5.9 DESPLAZAMIENTOS DEL CENTRO DE MASA

Se somete a la estructura a las siguientes acciones de fuerzas.

Para cada caso se calcula: $\{U_E\}_T = [K_E]_T^{-1} \{F_E\}_T$

Caso a): Fuerzas en cada una de las direcciones ortogonales

$$\begin{Bmatrix} F_{3EX} \\ F_{3EY} \\ F_{3EZ} \\ F_{2EX} \\ F_{2EY} \\ F_{2EZ} \\ F_{1EX} \\ F_{1EY} \\ F_{1EZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 34 \\ 10.2 \\ 2121.6 \\ 25 \\ 7.5 \\ 1560 \\ 13 \\ 3.9 \\ 811.2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ k \\ k-in \\ k \\ k \\ k-in \\ k \\ k \\ k-in \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} U_{3EX} \\ U_{3EY} \\ U_{3EZ} \\ U_{2EX} \\ U_{2EY} \\ U_{2EZ} \\ U_{1EX} \\ U_{1EY} \\ U_{1EZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3063 \\ 0.0919 \\ 0.00024 \\ 0.2261 \\ 0.0678 \\ 0.00018 \\ 0.0998 \\ 0.0299 \\ 0.00008 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} in \\ in \\ Rad/in \\ in \\ in \\ Rad/in \\ in \\ in \\ Rad/in \end{Bmatrix}$$

Caso b): Fuerzas en las direcciones E_X y E_Y .

$$\begin{Bmatrix} F_{3EX} \\ F_{3EY} \\ F_{3EZ} \\ F_{2EX} \\ F_{2EY} \\ F_{2EZ} \\ F_{1EX} \\ F_{1EY} \\ F_{1EZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 34 \\ 10.2 \\ 0 \\ 25 \\ 7.5 \\ 0 \\ 13 \\ 3.9 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ k \\ k-in \\ k \\ k \\ k-in \\ k \\ k \\ k-in \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} U_{3EX} \\ U_{3EY} \\ U_{3EZ} \\ U_{2EX} \\ U_{2EY} \\ U_{2EZ} \\ U_{1EX} \\ U_{1EY} \\ U_{1EZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3063 \\ 0.0919 \\ 0 \\ 0.2261 \\ 0.0678 \\ 0 \\ 0.0998 \\ 0.0299 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} in \\ in \\ Rad/in \\ in \\ in \\ Rad/in \\ in \\ in \\ Rad/in \end{Bmatrix}$$

Comparación de resultados con ETABS v9.6.0

Nivel	Dirección	M. Rigidez	ETABSv9.6.0	Discrepancia
Nivel 3	XE	0.3063	0.3063	0.00%
	YE	0.0919	0.0919	0.00%
	ZE	0.00024	0.00024	0.00%
Nivel 2	XE	0.2261	0.2261	0.00%
	YE	0.0678	0.0678	0.00%
	ZE	0.00018	0.00018	0.00%
Nivel 1	XE	0.0998	0.0998	0.00%
	YE	0.0299	0.0299	0.00%
	ZE	0.00008	0.00008	0.00%



5.10 ESFUERZOS EN LOS ELEMENTOS

Calculo de los esfuerzos de la columna 14 del pórtico sobre el eje 1.

Caso a):

Desplazamientos horizontales del pórtico 1 (4.12)

$$\{U_c\} = [T_p]^T \{U_E\}$$

$$[T_{p1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 240 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 240 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 240 \end{bmatrix} \quad \{U_E\} = \begin{bmatrix} 0.3063 \\ 0.0919 \\ 0.00024 \\ 0.2261 \\ 0.0678 \\ 0.00018 \\ 0.0998 \\ 0.0299 \\ 0.00008 \end{bmatrix} \quad \{U_{c1}\} = \begin{bmatrix} 0.3660 \\ 0.2702 \\ 0.1193 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Nivel 3} \\ \text{Nivel 2} \\ \text{Nivel 1} \end{matrix}$$

Grados de libertad rotacionales del pórtico 1 (3.20)

$$\{U_0\} = -[K_3]^{-1} [K_2] \{U_c\}$$

$$[K_3] = \begin{bmatrix} 1209236.82 & 255616.67 & 0 & 349001.74 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 255616.67 & 1720470.15 & 255616.67 & 0 & 349001.74 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 255616.67 & 1209236.82 & 0 & 0 & 349001.74 & 0 & 0 & 0 \\ 349001.74 & 0 & 0 & 1907240.30 & 255616.67 & 0 & 349001.74 & 0 & 0 \\ 0 & 349001.74 & 0 & 255616.67 & 2418473.64 & 255616.67 & 0 & 349001.74 & 0 \\ 0 & 0 & 349001.74 & 0 & 255616.67 & 1907240.30 & 0 & 0 & 349001.74 \\ 0 & 0 & 0 & 349001.74 & 0 & 0 & 1907240.30 & 255616.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 349001.74 & 0 & 255616.67 & 2418473.64 & 255616.67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 349001.74 & 0 & 255616.67 & 1907240.30 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{1z} \\ U_{2z} \\ U_{3z} \\ U_{4z} \\ U_{5z} \\ U_{6z} \\ U_{7z} \\ U_{8z} \\ U_{9z} \end{matrix}$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 8725.04 & -8725.04 & 0 \\ 8725.04 & -8725.04 & 0 \\ 8725.04 & -8725.04 & 0 \\ 8725.04 & 0 & -8725.04 \\ 8725.04 & 0 & -8725.04 \\ 8725.04 & 0 & -8725.04 \\ 0 & 8725.04 & 0 \\ 0 & 8725.04 & 0 \\ 0 & 8725.04 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{1x} \\ U_{4x} \\ U_{7x} \\ U_{1z} \\ U_{2z} \\ U_{3z} \\ U_{4z} \\ U_{5z} \\ U_{6z} \\ U_{7z} \\ U_{8z} \\ U_{9z} \end{matrix}$$

$$\{U_0\} = \begin{bmatrix} -0.000411 \\ -0.000244 \\ -0.000411 \\ -0.000791 \\ -0.000589 \\ -0.000791 \\ -0.001000 \\ -0.000678 \\ -0.001000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Nodo 1} \\ \text{Nodo 2} \\ \text{Nodo 3} \\ \text{Nodo 4} \\ \text{Nodo 5} \\ \text{Nodo 6} \\ \text{Nodo 7} \\ \text{Nodo 8} \\ \text{Nodo 9} \end{matrix}$$



Calculo de las fuerzas en el elemento 14 (2.74)

$$\{f\}_{Elemento} = [\lambda]_{Elemento}^T [K]_{Elemento} \{U\}_{Elemento}$$

Matriz del elemento columna en coordenadas globales

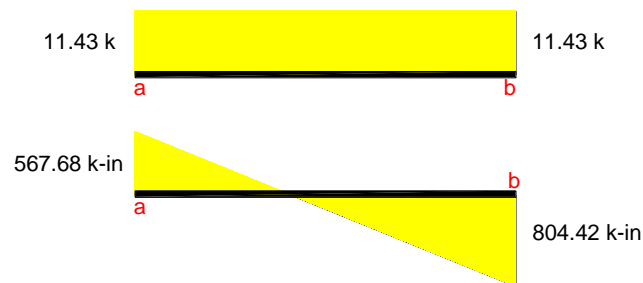
$$h=120 \text{ in} \quad A=256 \text{ in}^2$$

$$I=5461.33 \text{ in}^4 \quad E=3834.25 \frac{\text{k}}{\text{in}^2}$$

$$[K]^{C14} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} U_{aX} \\ U_{aY} \\ U_{aZ} \\ U_{bX} \\ U_{bY} \\ U_{bZ} \end{matrix} & \begin{matrix} 145.417 & 0 & 8725.044 & -145.417 & 0 & 8725.044 \\ 0 & 8179.733 & 0 & 0 & -8179.733 & 0 \\ 8725.044 & 0 & 698003.485 & -8725.044 & 0 & 349001.743 \\ -145.417 & 0 & -8725.044 & 145.417 & 0 & -8725.044 \\ 0 & -8179.733 & 0 & 0 & 8179.733 & 0 \\ 8725.044 & 0 & 349001.743 & -8725.044 & 0 & 698003.485 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$\{U\}_{14} = \begin{bmatrix} 0.1193 \\ 0.000000 \\ -0.000678 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \end{bmatrix} \quad [\lambda]_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \{f\}_{14} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 11.43 \\ 567.68 \\ 0.00 \\ -11.43 \\ 804.42 \end{bmatrix}$$

Los diagramas de esfuerzos de corte y flexión son:





Caso b):

Desplazamientos horizontales del pórtico1 (4.12)

$$\{U_c\} = [T_p]^T \{U_E\}$$

$$[T_{p1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 240 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 240 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 240 \end{bmatrix} \quad \{U_E\} = \begin{bmatrix} 0.3063 \\ 0.0919 \\ 0 \\ 0.2261 \\ 0.0678 \\ 0 \\ 0.0998 \\ 0.0299 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{U_{c1}\} = \begin{cases} 0.3063 & \text{Nivel 3} \\ 0.2261 & \text{Nivel 2} \\ 0.0998 & \text{Nivel 1} \end{cases}$$

Grados de libertad rotacionales del pórtico 1 (3.20)

$$\{U_0\} = -[K_3]^{-1}[K_2]\{U_c\}$$

$$[K_3] = \begin{bmatrix} 1209236.82 & 255616.67 & 0 & 349001.74 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 255616.67 & 1720470.15 & 255616.67 & 0 & 349001.74 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 255616.67 & 1209236.82 & 0 & 0 & 349001.74 & 0 & 0 & 0 \\ 349001.74 & 0 & 0 & 1907240.30 & 255616.67 & 0 & 349001.74 & 0 & 0 \\ 0 & 349001.74 & 0 & 255616.67 & 2418473.64 & 255616.67 & 0 & 349001.74 & 0 \\ 0 & 0 & 349001.74 & 0 & 255616.67 & 1907240.30 & 0 & 0 & 349001.74 \\ 0 & 0 & 0 & 349001.74 & 0 & 0 & 1907240.30 & 255616.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 349001.74 & 0 & 255616.67 & 2418473.64 & 255616.67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 349001.74 & 0 & 255616.67 & 1907240.30 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{1z} \\ U_{2z} \\ U_{3z} \\ U_{4z} \\ U_{5z} \\ U_{6z} \\ U_{7z} \\ U_{8z} \\ U_{9z} \end{matrix}$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 8725.04 & -8725.04 & 0 \\ 8725.04 & -8725.04 & 0 \\ 8725.04 & -8725.04 & 0 \\ 8725.04 & 0 & -8725.04 \\ 8725.04 & 0 & -8725.04 \\ 8725.04 & 0 & -8725.04 \\ 0 & 8725.04 & 0 \\ 0 & 8725.04 & 0 \\ 0 & 8725.04 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{1x} \\ U_{4x} \\ U_{7x} \end{matrix} \quad \{U_0\} = \begin{cases} -0.00034 & \text{Nodo 1} \\ -0.00020 & \text{Nodo 2} \\ -0.00034 & \text{Nodo 3} \\ -0.00066 & \text{Nodo 4} \\ -0.00049 & \text{Nodo 5} \\ -0.00066 & \text{Nodo 6} \\ -0.00084 & \text{Nodo 7} \\ -0.00057 & \text{Nodo 8} \\ -0.00084 & \text{Nodo 9} \end{cases}$$



Calculo de las fuerzas en el elemento 14 (2.74)

$$\{f\}_{Elemento} = [\lambda]_{Elemento}^T [K]_{Elemento} \{U\}_{Elemento}$$

Matriz del elemento columna en coordenadas globales

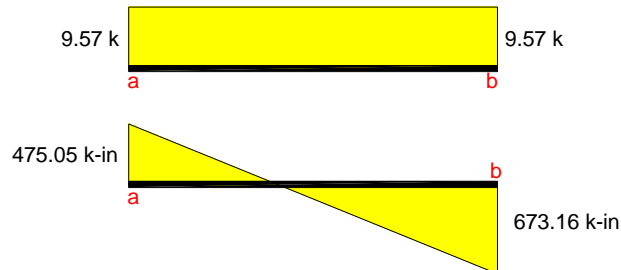
h=120 in A=256 in²

I=5461.33 in⁴ E=3834.25 $\frac{k}{in^2}$

$$[K]_{C14} = \begin{bmatrix} 145.417 & 0 & 8725.044 & -145.417 & 0 & 8725.044 \\ 0 & 8179.733 & 0 & 0 & -8179.733 & 0 \\ 8725.044 & 0 & 698003.485 & -8725.044 & 0 & 349001.743 \\ -145.417 & 0 & -8725.044 & 145.417 & 0 & -8725.044 \\ 0 & -8179.733 & 0 & 0 & 8179.733 & 0 \\ 8725.044 & 0 & 349001.743 & -8725.044 & 0 & 698003.485 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{aX} \\ U_{aY} \\ U_{aZ} \\ U_{bX} \\ U_{bY} \\ U_{bZ} \end{matrix}$$

$$\{U\}_{14} = \begin{bmatrix} 0.099800 \\ 0.000000 \\ -0.00057 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \end{bmatrix} \quad [\lambda]_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \{f\}_{14} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 9.57 \\ 475.05 \\ 0.000 \\ -9.57 \\ 673.16 \end{bmatrix}$$

Los diagramas de esfuerzos de corte y flexión son:



Comparación de resultados

Esfuerzo		Sin Torsión	Con Torsión	Discrepancia
a	Corte	9.57	11.43	16.3%
	Flexión	475.05	567.68	16.3%
b	Corte	-9.57	-11.43	16.3%
	Flexión	673.16	804.42	16.3%



CONCLUSIONES

Obtenida la matriz de rigidez de pórticos planos esta puede ser sometida a cualquier acción de carga que se pueda presentar, y por medio del procedimiento del ejemplo 2.1 se calculan los esfuerzos y deformaciones correspondientes, se debe notar que una vez obtenidos los desplazamientos en **coordenadas globales** se puede encontrar las fuerzas de los elementos en **coordenadas locales** directamente por medio de la ecuación 2.74.

Se mostro que la matriz de rigidez de pórticos planos puede ser expresada en función de los grados de libertad que se desea, en este caso específico solo los grados de libertad horizontales que posee cada pórtico en cada nivel.

Mediante la idealización de diafragma rígido se ha pudo expresar los grados de libertad de pórtico plano a grados de libertad de diafragma en el centro de masa en cada nivel esto permite:

- Realizar el análisis incorporando los efectos de torsión en planta por medio del grado de libertad U_{IEZ} .
- Distribuir automáticamente las fuerzas horizontales a los diferentes elementos que componen al sistema estructural en proporción de sus rigideces, esto puede ser observado por medio de la ecuación 4.12.
- Describir de forma explícita el hecho de que las fuerzas horizontales se aplican en el **centro de masa** del diafragma y que la estructura tiende a girar con respecto a su **centro de rigidez**, por lo tanto la aplicación de fuerzas horizontales en lugares diferentes del centro de rigidez producen efectos de torsión que se reflejaran en la **matriz de rigidez** del edificio automáticamente.



RECOMENDACIONES

El modelo matemático fue formulado para pórticos planos, por lo tanto la deformación por torsión en cada elemento no aparece, para esto se debe formular un modelo matemático capaz de incluir este efecto sobre los elementos.

Se utilizó el análisis estático para tratar ampliamente el concepto de la **matriz de rigidez** y la forma de modificarla a través de los distintos criterios de análisis, El análisis dinámico con sus respectivos conceptos y enfoques permitiría ampliar los objetivos de este trabajo monográfico.

La hipótesis de diafragma rígido se utilizó para formular la relación de rigidez existente entre cada pórtico y entrepiso, para ampliar este concepto se necesitaría, estudiar los distintos sistemas estructurales, materiales, uniones con el diafragma, formas del diafragma y fuerzas a transferir. Los objetivos de este trabajo monográfico no cubren estos conceptos.



BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

1. Análisis de Estructuras con Métodos Matriciales (Capítulos I-II-III-IV-V)
Arturo Tena Colunga
México Limusa 2007
2. Análisis Estructural (Capítulos I-II-III)
Jan J. Tuma Ph. D
Primera edicion 1974
3. Análisis Matricial de Estructuras (Capítulos I-II-III-IV)
Roberto Aguiar Falconi
Escuela Politécnica del Ejército
4. Curso de Análisis estructural (Capítulos I-II)
Juan Tomás Celigueta
5. Dinámica Estructural Aplicada al Diseño Sísmico (Capítulos I-II-III-IV-V)
Luís Enrique García Reyes
Universidad de los Andes
Dpto. Ingeniería Civil
Bogotá, Colombia, 1998
6. Diseño Sísmico de Edificios (Capítulos I-II-III)
Enrique Bazán y Roberto Meli
México Limusa 2007
7. Examples in Structural Analysis (Capítulos I-II)
William M .C. McKenzie
Taylor & Francis Group, 2006



8. Fundamentals of Earthquake Engineering (Capítulos I-II-III)
Amr S. Elnashai, Luigi Di Sarno
John Wiley and Son, Ltd, Publication
9. Matrix Analysis of Structural Dynamics (Capítulos I-II)
Applications and Earthquake Engineering
Franklin Y. Cheng
Marcel Dekker, INC.2001
10. Reglamento Nacional de la construcción (Capítulo IV)
RCN-1983
11. Structural Analysis (Capítulos I-II)
In Theory and Practice
Alan Williams PhD, S.E., C.Eng
ELSEVIER, 2009
12. Structural Analysis (Capítulos I-II)
Civil Engineering Course Material from IIT Kharagpur
Version 2CE, 2008
13. Structural Analysis (Capítulos I-II)
with applications to Aerospace Structures
O.A Bauchau and J.I Craig
Springer, 2009
14. Seismic Analysis of structures (Capítulo IV)
T. K. Datta
Indian Institute of Technology Delhi, India



ANEXOS

A.1 Glosario de términos

Centro de masa: En un sistema discreto o continuo es el punto geométrico que dinámicamente se comporta como si en él estuviera aplicada la resultante de las fuerzas externas al sistema.

Cuerpo rígido: Un cuerpo rígido se puede definir como aquel que no sufre deformaciones por efecto de fuerzas externas, es decir un sistema de partículas cuyas posiciones relativas no cambian.

Diafragma: Es un sistema estructural capaz de transferir las cargas laterales a los elementos que forman el sistema vertical resistente.

Elasticidad lineal: Se presenta cuando las tensiones y las deformaciones están relacionadas linealmente.

Estructura: Ensamble de miembros ortogonales diseñados para soportar cargas de gravedad y fuerzas laterales.

Estructura hiperestática: Una estructura es hiperestática o estáticamente indeterminada cuando está en equilibrio pero las ecuaciones de la estática resultan insuficientes para determinar todas las fuerzas internas o las reacciones.

Matriz cuadrada: es una matriz en la cual el número de filas iguala al número de columnas.

Matriz simétrica: una matriz cuadrada es simétrica cuando sus elementos cumplen con la igualdad $a_{ij}=a_{ji}$

Matriz singular: si el determinante de una matriz es cero.



Método matricial de la rigidez: El método matricial de la rigidez es un método de cálculo aplicable a estructuras hiperestáticas de barras que se comportan elástica y linealmente.

Matriz de rigidez: Es la matriz que conceptualmente relaciona los desplazamientos de una serie de puntos o nodos, con los esfuerzos puntuales efectivos en dichos puntos.

Rigidez: Es la capacidad de una estructura o de sus miembros de resistir deformaciones sin fallas estructural o funcionales.

Capítulo 1

E= Módulo de elasticidad del material

I = Momento de inercia

Δ = Desplazamiento lateral

P= Fuerza lateral

h= altura

σ_e = esfuerzo en el límite elástico

ϵ_e = deformación unitaria en el límite elástico

Capítulo 2

A= área de la sección transversal

[K]= Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales

[K^V]= Matriz de rigidez del elemento viga en coordenadas globales

[K^C]= Matriz de rigidez del elemento columna en coordenadas globales

[K_P]= Matriz de rigidez del pórtico en coordenadas globales



Capítulo 3

$[K_i]$ = Matriz de rigidez del pórtico solo con los grados de libertad independientes en coordenadas globales.

$[K_s]$ = Matriz de rigidez de un sistema cualquiera en coordenadas globales

$[K_c]$ = Matriz de rigidez del pórtico con los grados de libertad rotacionales condensados, en coordenadas globales

UBC=Uniform Building Code

Capítulo 4

$[K_E]$ = Matriz de rigidez del pórtico expresada en función de los grados de libertad de toda la estructura

$[K_E]_T$ = Matriz de rigidez de la estructura

c.m.= centro de masas

F_E = Fuerzas en el centro de masa i de la estructura

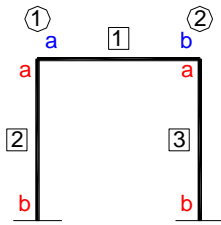
$[T_P]$ = Matriz de transformación de grados de libertad de pórtico a grados de libertad de diafragma.

Anexo A.4

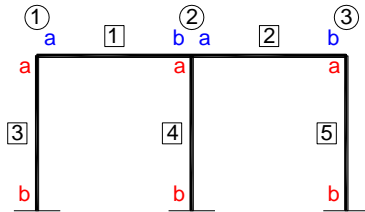
RCN= Reglamento Nacional de la Construcción.



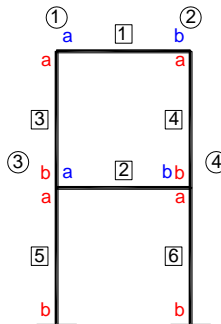
A.2 CONCATENACIÓN para los pórticos de la figura 1.15



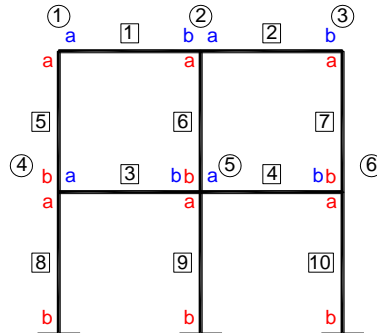
$$[K_P] = \begin{bmatrix} K_{aa}^{V1} + K_{aa}^{C2} & K_{ab}^{V1} \\ K_{ba}^{V1} & K_{bb}^{V1} + K_{aa}^{C3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$



$$[K_P] = \begin{bmatrix} K_{aa}^{V1} + K_{aa}^{C3} & K_{ab}^{V1} & 0 \\ K_{ba}^{V1} & K_{bb}^{V1} + K_{aa}^{V2} + K_{aa}^{C4} & K_{ab}^{V2} \\ 0 & K_{ba}^{V2} & K_{bb}^{V2} + K_{aa}^{C5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$



$$[K_P] = \begin{bmatrix} K_{aa}^{V1} + K_{aa}^{C3} & K_{ab}^{V1} & K_{ab}^{C3} & 0 \\ K_{ba}^{V1} & K_{bb}^{V1} + K_{aa}^{C4} & 0 & K_{ab}^{C4} \\ K_{ba}^{C3} & 0 & K_{aa}^{V2} + K_{bb}^{C3} + K_{aa}^{C5} & K_{ab}^{V2} \\ 0 & K_{ba}^{C4} & K_{ba}^{V2} & K_{bb}^{V2} + K_{bb}^{C4} + K_{aa}^{C6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$



$$[K_P] = \begin{bmatrix} K_{aa}^{V1} + K_{aa}^{C5} & K_{ab}^{V1} & 0 & K_{ab}^{C5} & 0 & 0 \\ K_{ba}^{V1} & K_{bb}^{V1} + K_{aa}^{V2} + K_{aa}^{C6} & K_{ab}^{V2} & 0 & K_{ab}^{C6} & 0 \\ 0 & K_{ba}^{V2} & K_{bb}^{V2} + K_{aa}^{C7} & 0 & 0 & K_{ab}^{C7} \\ K_{ba}^{C5} & 0 & 0 & K_{aa}^{V3} + K_{bb}^{C5} + K_{aa}^{C8} & K_{ab}^{V3} & 0 \\ 0 & K_{ba}^{C6} & 0 & K_{ba}^{V3} & K_{bb}^{V3} + K_{aa}^{V4} + K_{bb}^{C6} + K_{aa}^{C9} & K_{ab}^{V4} \\ 0 & 0 & K_{ba}^{C7} & 0 & K_{ba}^{V4} & K_{bb}^{V4} + K_{bb}^{C7} + K_{aa}^{C10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$



A.3 Método de condensación estática sin eliminar las deformaciones axiales para el pórtico de la figura 2.28.

Matriz de rigidez ensamblada.

$$[K_p] = \begin{bmatrix} \overset{U_{1X}}{2562.67} & \overset{U_{1Y}}{0} & \overset{U_{1Z}}{2272.32} & \overset{U_{2X}}{-2524.80} & \overset{U_{2Y}}{0} & \overset{U_{2Z}}{0} \\ 0 & 3798.42 & 1346.56 & 0 & -11.22 & 1346.56 \\ \color{red}{2272.32} & \color{red}{1346.56} & \color{red}{397235.20} & 0 & \color{red}{-1346.56} & \color{red}{107724.80} \\ -2524.80 & 0 & 0 & 2562.67 & 0 & 2272.32 \\ 0 & -11.22 & -1346.56 & 0 & 3798.42 & -1346.56 \\ 0 & 1346.56 & 107724.80 & \color{red}{2272.32} & \color{red}{-1346.56} & \color{red}{397235.20} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{1Z} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \\ U_{2Z} \end{Bmatrix}$$

Matriz de rigidez re-ordenada

$$[K_p] = \begin{bmatrix} \overset{U_{1X}}{2562.67} & \overset{U_{2X}}{-2524.80} & \overset{U_{1Z}}{2272.32} & \overset{U_{2Z}}{0} & \overset{U_{1Y}}{0} & \overset{U_{2Y}}{0} \\ \color{red}{-2524.80} & \color{red}{2562.67} & 0 & 2272.32 & 0 & 0 \\ 2272.32 & 0 & \color{red}{397235.20} & \color{red}{107724.80} & 1346.56 & -1346.56 \\ 0 & 2272.32 & \color{red}{107724.80} & \color{red}{397235.20} & 1346.56 & -1346.56 \\ 0 & 0 & 1346.56 & 1346.56 & 3798.42 & -11.22 \\ 0 & 0 & -1346.56 & -1346.56 & -11.22 & 3798.421 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{2X} \\ U_{1Z} \\ U_{2Z} \\ U_{1Y} \\ U_{2Y} \end{Bmatrix}$$

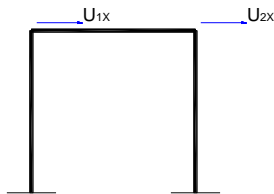
Escrita en forma de sub-matrices

$$[K_p] = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 \\ K_2 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_C \\ U_0 \end{Bmatrix}$$

Aplicando la ecuación 3.19

$$[K_C] = [K_0] - [K_1][K_3]^{-1}[K_2]$$

Resultado:



$$[K_C] = \begin{bmatrix} \overset{U_{1X}}{2548.622} & \overset{U_{2X}}{-2521.014} \\ -2521.014 & 2548.622 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{2X} \end{Bmatrix}$$

A.4 Consideración sobre diafragma rígido según: RNC-83 Arto.7 inciso e.3

DIAFRAGMA RÍGIDO: Diafragma, ya sea de techo o entrepiso que pueda distribuir las cargas horizontales según las rigideces de los elementos resistentes de apoyo.

Como ejemplo de diafragmas rígidos se puede considerar:



Losas solidas de concreto reforzado coladas en el sitio; o losas formadas por franjas (viguetas) de elementos prefabricados sin juntas monolíticas entre ellas, pero con una losa sólida adicional de concreto reforzado coladas sobre los elementos prefabricados y debidamente ancladas a ellos.

Esta placa o losa adicional deberá tener no menos de 5 cm. de espesor y deberá reforzarse en cada dirección, de acuerdo a los requerimientos de análisis o por temperatura, cualquiera que sea mayor.

Las viguetas prefabricadas, deberán estar bien ancladas en sus extremos a un cordón o viga monolítica de concreto reforzada, debidamente calculada para evitar figuración. Los entrepisos o techos que no cumplan con estas condiciones no deberán considerarse como diafragma rígidos y no podrán emplearse en construcciones de paredes prefabricadas mayores de un piso.

Para losas de concreto el diafragma rígido deberá cumplir con la siguiente condición:

$$F = \frac{28.4 \times 10^6}{t \sqrt{W^3 f'_c}} \leq 1$$

Ecuación A.4.1

t= Espesor de la losa en cm.

W= Peso del concreto en Kg/m³ el menor valor de W será 1450 Kg/m³.

f'_c = Esfuerzo de compresión del concreto a los 28 días en Kg/cm²

F= Factor de rigidez en micro centímetros por metro de claro y por cortante unitario de 1 Kg/m.

Para el ejemplo del capítulo 5 se tiene:

$$f'_c = 4000 \text{ psi} = 280 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$W = 150 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} = 2500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

Aplicando la ecuación A.4.1

$$t \geq \frac{28.4 \times 10^6}{\sqrt{W^3 f'_c}}$$

$$t \geq \frac{28.4 \times 10^6}{\sqrt{2500^3 \times 280}}$$

Por lo cual se tiene:

$$t \geq 13.58 \text{ cm o } 5.34 \text{ in}$$